ISSN 1609-0586

BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

ВЕСТНИК БАКИНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

NEWS OF BAKU UNIVERSITY

FİZİKA-RİYAZİYYAT
elmləri seriyası

серия
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ НАУК

series of
PHYSICO-MATHEMATICAL SCIENCES

№ 4, 2022

Bakı – 2022

BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* *2022*

RİYAZİYYAT

УДК 517.53

О КВАЗИЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЯХ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Р.А.АМАНОВ, А.И ИСМАИЛОВ
Национальная Академия Авиации Азербайджана
Бакинский Государственный Университет
amanov.ravil57@gmail.com
diferensial.tenlikler@mail.ru

В статье рассматривается начально-краевая задача для квазилинейного параболического уравнения второго порядка. Для этих задач устанавливается оценка для показателя степенного роста подчиненного нелинейного оператора относительно соответствующей производной. Описывается интерполяционный метод получения априорных оценок сильных решений с неограниченными особенностями в правой части при условии наличия первой априорной оценки в пространстве суммируемых функций. Доказывается теорема о разрешимости краевых задач.

Ключевые слова: интерполяционный метод, показателя степенного роста.

Введение. Изучается начально-краевая задача для квазилинейных параболических уравнений с главным квазилинейным параболическим оператором второго порядка в пространстве Соболева $W_p^{2,1}(Q_T)$. Определяются показатели соответствующих нелинейностей, при которых эта проблема имеет решение. Доказательство разрешимости краевых задач проводится на основании приведенных теорем об априорных оценках с использованием метода Лере-Шаудера.

Условимся в некоторых обозначениях и определениях. Пусть $a \in R_+ \equiv \{a \in R : a \geq 0\}$. Введем следующие обозначения: $x = (x_1, \ldots, x_n)$- точка пространства $R^n, \Omega \subset R^n$- ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса $C^2; Q_t = \Omega \times (a, a+t)$ цилиндрическая область в пространстве $R^{n+1}, t \in R_+; \partial Q_t = \partial\Omega x(a, a+t)$- боковая поверхность цилиндра $Q_t; Q \equiv Q_T = \Omega x(0,T)$- цилиндр заданной высоты $T > 0$ и $\Gamma(Q) = \{(x,t) | x \in \overline{\Omega}, t = 0\} \cup (\partial\Omega x[0,T])$. Всюду далее функции считаются вещественнозначными. В работе используются следующие функциональные пространства: пространство суммируемых функций $L_p(Q_T)$, $p \ge 1$ с нормой

$$\|u\|_{p;Q_T} \equiv \|u\|_{L_p(Q_T)} = \left(\int_0^T \int_\Omega |u(x,t)|^p dxdt\right)^{\frac{1}{p}};$$

анизотропное пространство суммируемых функций $L_{q,r}(Q)$, $q,r \ge 1$, с нормой

$$\|u\|_{q,r;Q_T} \equiv \|u\|_{L_{q,r}(Q_T)} = \left(\int_0^T \left(\int_\Omega |u(x,t)|^q dx\right)^{\frac{r}{q}} dt\right)^{\frac{1}{r}};$$

анизотропное пространство Соболева $W(Q_T) \equiv W_p^{2,1}(Q_T)$ с нормой

$$\|u\|_{W(Q_T)} = \|u\|_{p;Q_T} + \sum_{i=1}^n \left\|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}\right\|_{p;Q_T} + \left\|\frac{\partial u}{\partial t}\right\|_{p;Q_t}.$$

Через D^2u обозначим вектор из частных производных $D^\alpha u$ функции $u(x,t)$, $\alpha = (\alpha_1,...,\alpha_n,0)$ $|\alpha| = 2$.

§ 1.Основная априорная оценка

Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} Lu - \dfrac{\partial u}{\partial t} = f(x,t,u,Du),\ (x,t) \in Q_T, \\ u\big|_{\partial Q_T} = \varphi(x,t), x \in \partial\Omega,\ t \in (0,T), \\ u\big|_{t=0} = \psi(x),\ x \in \Omega \end{cases} \tag{1.1}$$

в вещественном пространстве Соболева $W_p^{2,1}(Q_T)c$ $p > 1$ при условии, что существует априорная оценка

$$\|u\|_\infty \equiv \lim_{\substack{q\to\infty \\ r\to\infty}} \|u\|_{q,r;Q_T} \ u \quad p > n+2.$$

Относительно краевой задачи (1.1) предположим, что выполнены следующие условия.

A.1) Пусть функция $f(x,t,\xi_0,\xi_1)$ определена на $Q_T \times R \times R^n$ со значениями в R и является каратеодориевой функцией, т.е. измеримой по (x,t) при всех $(\xi_0,\xi_1) \in R \times R^n$ и непрерывной по (ξ_0,ξ_1) почти при всех $(x,t) \in Q_T$.

A.2) Пусть

$$|f(x,t,\xi_0,\xi_1)| \le b(x,t,\xi_0) + b_1(x,t,\xi_0)|\xi_1|^{\mu_1}$$

почти при всех $(x,t) \in Q_T$ и при всех $\xi_0 \in R$, $\xi_1 \in R^n$, с неотрицательными каратеодориевыми функциями b и b_1 такими, что при любом $\delta \ge 0$

функция

$$\hat{b}_\delta(x,t) \equiv \sup\left\{ b(x,t,\xi_0) \middle| \, |\xi_0| \le \delta \right\}$$

принадлежит $L_p(Q_T)$, $p>1$ и $p>n+2$

$$\hat{b}_{1,\delta}(x,t) \equiv \sup\left\{ b_1(x,t,\xi_0) \middle| \, |\xi_0| \le \delta \right\}$$

принадлежит $L_{q,r}(Q_T)$, $cq \ge p$, $r \ge p.$

А.3) Пусть

$$\mu_1 = 2 - \frac{n}{q} - \frac{2}{r}. \tag{1.2}$$

А.4) Пусть L есть квазилинейный эллиптический оператор второго порядка вида

$$Lu = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x,t,u,Du)D^\alpha u,$$

коэффициенты $a_\alpha(x,t,\xi_0,\xi_1)$ $(|\alpha|=2)$ оператора L являются вещественными и непрерывными функциями на $\overline{Q}_T \times R \times R^n$. Пусть линейный относительно $u(x,t)$ оператор $L_\vartheta u = \sum_{|\alpha|=2} a_\alpha(x,t,\vartheta,D\vartheta)D^\alpha u$, при любой функции $\vartheta \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$ есть линейный эллиптический оператор, что линейная относительно $u(x,t)$ краевая задача

$$\begin{cases} L_\vartheta u - \dfrac{\partial u}{\partial t} = g(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \\ u\big|_{\partial Q_T} = \varphi(x,t), x \in \partial\Omega, \ t \in (0,T), \\ u(x,o)| = \psi(x), \ x \in \Omega \end{cases} \tag{1.3}$$

при любой функции $\vartheta \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$ является коэрцитивной в пространстве $W_p^{2,1}(Q_T)$, т.е. выполнена априорная оценка

$$\|u\|_{W(Q_T)} \le C\left(\|g\|_{p;Q_T} + \|\varphi\|_{W_p^{2-\frac{1}{p},1}(\partial Q_T)} + \|\psi\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)} + \|u\|_{p;Q_T}\right) \tag{1.4}$$

с положительной постоянной C, не зависящей от $g \in L_p(Q_T)$, от $\varphi(x,t) \in W_p^{2-\frac{1}{p},1}(\partial Q_T)$, $\psi \in W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)$ и от решения $u \in W(Q_T)$ задачи (1.3).

При этом постоянная C может зависеть от модулей непрерывности коэффициентов $a_\alpha(|\alpha|=2)$ и модулей непрерывности функций ϑ и $D\vartheta$.

Отметим, что достаточные условия на коэффициенты оператора L и на $\varphi(x,t)$, $\psi(x)$ обеспечивающие коэрцитивность линейной краевой задачи (1.3), изложены в работе [8].

Этому вопросу посвящены работы С.Н.Бернштейна [1], О.А.Ладыженской и Н.Н.Уральцевой [2], Г.Аманна и М.Кренделла [3], С.И.Похожаева [4-5], Г.Г.Лаптева [6-7]. В работах [1-3] предполагается, что нелинейная функция, содержащая Du- градиент решения $u(x,t)$, является непрерывной по всем своим аргументам. В этом случае известное условие С.И.Бернштейна (см. [1-3]) на рост нелинейной функции является достаточным. В работах [4-5] и [6-7] рассматривается краевые задачи для квазилинейных эллиптических и полулинейных параболических уравнений, соответственно. Не предполагается непрерывность нелинейной функции. Требуемая эта нелинейная функция принадлежала пространству L_p.

В настоящей работе рассматриваются первая краевая задача для квазилинейных параболических уравнений второго порядка в пространстве Соболева. Основные внимание уделяется вопросу о достижимости предельных степеней роста нелинейной составляющей уравнения и ограничениям на показатель ее суммируемости. Как известно для уравнений эллиптического [4] и параболического [7] типов второго порядка предельные степени достигаются. Но для эллиптических уравнений высокого порядка это неверно [5]. В параболическом случае Валль [11,14,15] доказал, что при выполнении условия типа коэрцитивности для уравнений высокого порядка и систем допустима предельная степень роста.

В работе приводится теорема об априорной оценке $\|u\|_{W(Q_T)}$, выражаемой через $\|u\|_\infty$. На одном частном примере показывается неулучшаемость соответствующего показателя роста. Доказывается теорема о разрешимости краевых задач для нелинейных параболических уравнений при условии существования априорной оценки $\|u\|_\infty$.

В основе работе лежат следующие два момента: использования интерполяционного неравенства для оценки $\|Du\|$ через $\|u\|_{W_p^{2,1}(Q_t)}$ и $\|u\|_{\infty;Q_t}$ и применение о разрешимости линейных параболических задач в малом цилиндре (см. [8], [9], [13]). С помощью специальных построений показано, что коэффициенты при $\|u\|_{W_p^{2,1}(Q_t)}$ не зависят от высоты цилиндра, когда эта высота мала. Это позволяет за счет использования цилиндров малой высоты установить достижимость предельных степеней μ_1 (см. [12]).

Лемма1.1. Пусть $u(x,t)\in W(Q_\tau)$, $Q_\tau=\Omega\times(t_0,t_0+\tau)\subset Q$, $u(x,t_0)=0$ и выполнены (1.2), $p>n+2$, $q\ge p$, $r\ge p$. Тогда

$$\|Du\|_{z_x,z_t;Q_\tau}\le C_1\cdot\|u\|_{W(Q_\tau)}^{\theta_1}\cdot\|u\|_{\alpha,\beta;Q_\tau}^{1-\theta_1}+C_2\cdot\|u\|_{\alpha,\beta;Q_\tau},\tag{1.5}$$

с положительными постоянными C_1 и C_2, не зависящими от функции

$u(x,t)$ из $W(Q_\tau)$, t_0 и τ, где

$$\theta_1 = \frac{1}{\mu_1}, \mu_1 = \frac{æ_0 + æ_1}{æ_0}, æ_0 = \frac{1}{2}\left[n\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{z_x}\right) + 1 + 2\left(\frac{1}{\beta} - \frac{1}{z_t}\right)\right] > 0,$$

$$æ_1 = 1 - \frac{1}{2}\left[n\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{z_x}\right) + 1 + 2\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{z_t}\right)\right] > 0, \tag{1.6}$$

$z_x = \dfrac{\mu_1 pq}{q-p} \ge \alpha,\ z_t = \dfrac{\mu_1 pr}{r-p} \ge \beta,\ \ 1 \le \alpha,\ \ \beta \le \infty$ постоянные и $\mu_1 > 1$.

Доказательство. Согласно условию леммы функция $u(x,t)$ первоначально задана в цилиндре малой высоты τ. Продолжим ее на весь цилиндр Q_T, доопределив нулем на отрезке $[0,t_0]$, а затем отобразив четным образом относительно точки $t_0 + \tau$. Подробнее

$$\tilde{u}(x,t) = \begin{cases} 0, t \le t_0, \\ u(x,t),\ t_0 < t < t_0 + \tau, \\ u(x, 2(t_0 + \tau) - t),\ t_0 + \tau \le t < t_0 + 2\tau, \\ 0, \quad t \ge t_0 + 2\tau. \end{cases}$$

Заметим, что согласно теореме о следах [13] при каждом $t \in [t_0,\ t_0 + \tau]$ определен след $u(x,t)$ как непрерывная в $\overline{\Omega}$ функция. В частности, вполне определены функции $u(x,t_0)$ и $u(x,t_0+\tau)$.

Очевидно, что $\tilde{u} \in W(Q_T)$, при этом $\|\tilde{u}\|_{\alpha,\beta;Q_T} \le 2\|u\|_{\alpha,\beta;Q_\tau}$,

$$\|\tilde{u}\|_{W(Q_T)} \le 2\|u\|_{W(Q_\tau)},\ \|D\tilde{u}\|_{z_x,z_t,Q_T} \ge \|Du\|_{z_x,z_t,Q_\tau}. \tag{1.7}$$

К функции $\tilde{u} \in W(Q_T)$ применим теорему вложения анизотропных пространств Соболева [9, 10,12], согласно которой найдется $\delta_0 \in R_+$ такое, что для любого $0 < \delta_1 \le \delta_0$

$$\|D\tilde{u}\|_{z_x,z_t,Q} \le C \cdot \delta_1^{-æ} \cdot \|\tilde{u}\|_{\alpha,\beta;Q} + C \cdot \delta_1^{æ_1} \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial^2 \tilde{u}}{\partial x_i^2} \right\|_{p;Q} + \left\| \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} \right\|_{p;Q} \right).$$

Отметим также, что константа C не зависит от t_0 и τ, так как функция $\tilde{u}(x,t)$ определена по всем цилиндре Q_T. В результате несложных преобразований имеем (см.[1,2,7]).

$$\|D\tilde{u}\|_{z_x,z_t,Q} \le C \cdot \|\tilde{u}\|_{W(Q_T)}^{\theta_1} . \|\tilde{u}\|_{\alpha,\beta;Q_T}^{1-\theta_1} + C\|\tilde{u}\|_{\alpha,\beta;Q_T}.$$

Непосредственный подсчет показывает, что $æ_0/(æ_0 + æ_1) = 1/\mu_1$. Учитывая неравенства (1.7), получим утверждение Леммы 1.1.

Лемма 1.2. Оператор $F_0(u)(x,t) \equiv f(x,t,u,Du)$ при условиях $A \cdot 1) - A \cdot 3)$ и (1.6) является ограниченным и непрерывным оператором из пространства $W(Q_\tau)$ в $L_p(Q_\tau)$.

Доказательство. Оценим $\|F_0(u)\|_{p;Q_\tau}$ с помощью условиях $A\cdot 1)-A\cdot 3)$ и (1.6).

Из интерполяционного неравенства (1.5) для Du, имеем

$$\|Du\|_{z_x,z_t;Q_\tau} \le C_1\cdot\|u\|^{\theta_1}_{W(Q_\tau)}\cdot\|u\|^{1-\theta_1}_{\infty;Q_\tau} + C_2\cdot\|u\|_{\infty;Q_\tau} \tag{1.8}$$

Из условий $A\cdot 2)$ следует, что

$$\|F_0(u)\|_{p;Q_\tau} \le \left\|\hat{b}_\delta\right\|_{p;Q_\tau} + C_3\cdot\left\|\hat{b}_{1,\delta}\right\|_{q,r;Q_\tau}\cdot\|Du\|^{\mu_1}_{z_x,z_t;Q_\tau}$$

с $\delta=\|u\|_\infty$ и положительной постоянной C_3, не зависящей от функции $u(x,t)$ из $W(Q_\tau), t_0$ и τ. Тогда на основании равенства (1.2) и интерполяционных неравенств (1.8) с указанными z_x, z_t и μ_1, соответствующими им формуле (1.6), получаем

$$\|F_0(u)\|_{p;Q_\tau} \le \left\|\hat{b}_\delta\right\|_{p;Q_\tau} + \|u\|_{W(Q_\tau)}\cdot\left\|\hat{b}_{1,\delta}\right\|_{q,r;Q_\tau}\cdot\Phi_1\left(\|u\|_\infty\right)+\Phi_2\left(\|u\|_\infty\right), \quad 1.9)$$

где $\Phi_1,\Phi_2 : R_+\to R_+$ - возрастающие функции, определяемые известными данными. Это доказывает ограниченность оператора $F_0(u)$.

С другой стороны $p>n+2$. Тогда в силу теорем вложения Соболева [8,12] следует, оператор вложения $\mathrm{I}:W(Q_\tau)\to L_{z_x,z_t}(Q_\tau)$ вполне непрерывен.

В силу (1.9) оператор $F_0 : L_{z_x,z_t;Q_\tau}\to L_p(Q_\tau)$ ограничен и по общим свойствам оператора суперпозиции непрерывен.

Таким образом, оператор $F_0 : W(Q_\tau)\to L_p(Q_\tau)$ вполне непрерывен как композиция вполне непрерывного и непрерывного операторов.

Лемма1.2. доказана.

Теорема1.1 Пусть выполнены условия $A\cdot 1)-A\cdot 4)$. Тогда существует возрастающая по каждому аргументу функция $\mu : R^3_+\to R_+$, $R_+=\{y|y\ge 0\}$ такая, что для любого возможного решения $u\in W(Q_T)$ задачи (1.1) выполнена априорная оценка.

$$\|u\|_{W(Q)} \le \mu\left(\|u\|_\infty, \|\psi\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)}, \|\varphi\|_{W_p^{2-\frac{1}{p},1}(\partial Q_T)}\right) \tag{1.10}$$

Функция μ зависит только от известных данных, входящих в условия теоремы (в том числе и от величин $\left\|\hat{b}_\delta\right\|_{p;Q_T}$, $\left\|\hat{b}_{1,\delta}\right\|_{q,r;Q_T}$ с $\delta=\left(\|u\|_\infty\right)$).

Доказательство. Рассмотрим в цилиндре $Q_\tau=\Omega x\left(t_0,t_0+\tau\right)$ линейную задачу

$$\begin{cases} L_\vartheta u - \dfrac{\partial u}{\partial t} = g(x,t),\ (x,t) \in Q_\tau, \\ u\big|_{\partial Q_\tau} = \varphi(x,t),\ x \in \partial\Omega,\ t \in (t_0, t_0 + \tau);\ u(x,t_0) = \psi(x),\ x \in \Omega \end{cases} \tag{1.11}$$

которое является коэрцитивной в пространстве $W(Q_\tau)$, т.е. выполнена априорная оценка

$$\|u\|_{W(Q_\tau)} \le C\left(\|g\|_{p;Q_\tau} + \|\psi\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)} + \|\varphi\|_{W_p^{2-\frac{1}{p},1}(\partial Q_\tau)} + \|u\|_{p;Q_\tau}\right) \tag{1.12}$$

с положительной постоянной C, не зависящей от $g \in L_p(Q_\tau)$, и от $\varphi \in W_p^{2-\frac{1}{p},1}$, $\psi \in W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)$, решения $u \in W(Q_\tau)$, и ни от t_0 и τ. При этом постоянная C может зависеть от модулей непрерывности коэффициентов $a_\alpha(|\alpha| = 2)$ и модулей непрерывности функций $\vartheta, d\vartheta$.

Подберем малое τ, исходя из следующий соображений. Разобьём область Q_T на цилиндры $Q^0 = \Omega\times(0,\tau)$, $Q^1 = \Omega\times(\tau, 2\tau),\ldots,$ $Q^k = \Omega\times(k\tau,(k+1)\tau),\ldots,Q^K = \Omega\times(K\tau,T)$ высоты τ. Поскольку τ фиксировано, число этих цилиндров конечно.

Пусть $u_0(x,t) \in W(Q)$ решение задачи (1.1). Рассмотрим задачу (1.1) в цилиндре Q^0 как линейную с правой частью $f_0 \equiv f(x,t,u_0,Du_0)$. Используя неравенство коэрцитивности (1.12) с $g(x,t) = f_0 = F_0(u_0)(x,t)$ для задачи (1.11) , оценку

$$\|u\|_{p;Q_\tau} \le C_4\|u\|_{\infty;Q_\tau} \tag{1.13}$$

с постоянной C_4 не зависящей от функции $u(x,t)$ из $W(Q_\tau)$, t_0 и τ и неравентсво (1.9), получаем

$$\begin{aligned} \|u_0\|_{W(Q^0)} \le C\Bigg(&\left\|\hat{b}_\delta\right\|_{p;Q^0} + \|u_0\|_{W(Q^0)}\cdot\Phi_1\left(\|u_0\|_{\infty;(Q^0)}\right)\times \\ &\times\left\|\hat{b}_{1,\delta}\right\|_{q,r;Q^0} + \Phi_2\left(\|u_0\|_{\infty;(Q^0)}\right) + C_4\|u_0\|_{\infty;(Q^0)} + \|\psi\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)} + \\ &+\|\varphi\|_{W_p^{2-\frac{1}{p},1}(\partial Q^0)}\Bigg) \end{aligned} \tag{1.14}$$

Используя изложенное, подберем τ так, чтобы выполнялось неравенство

$$C\cdot\Phi_1\left(\|u_0\|_{\infty;(Q_\tau)}\right)\cdot\left\|\hat{b}_{1,\delta}\right\|_{q,r;Q_\tau} \le \frac{1}{2}\ . \tag{1.15}$$

В силу (1.15) коэффициент при $\|u_0\|_{W(Q^0)}$ в (1.14) не превосходит $\dfrac{1}{2}$, так что неравенство (1.14) принимает вид

$$\|u_0\|_{W(Q^0)} \le \frac{1}{2}\|u_0\|_{W(Q^0)} + \frac{1}{2}C^0,$$

где постоянная C^0 определяется из (1.14):

$$\frac{C^0}{2} = C\left(\left\| \hat{b}_\delta \right\|_{p;Q^0} + \Phi_2\left(1\|u_0\|_{\infty;(Q^0)}\right) + C_4\|u_0\|_{\infty;(Q^0)} + \|\psi\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)} + \right.$$
$$\left. + \|\varphi\|_{W_p^{2-\frac{1}{p},1}(\partial Q^0)} \right).$$

Тогда $\|u_0\|_{W(Q^0)} \le C^0.$

Рассмотрим цилиндры Q^{k-1} и Q^k, $1 \le k \le \mathrm{K}$ и допустим, что уже получена оценка $\|u_0\|_{W(Q^{k-1})} \le C^{k-1}$. Убедимся, что из нее следует оценка $\|u_0\|_{W(Q^k)} \le C^k$.

Обозначим $\vartheta(x,t) = u_0(x,\, 2k\tau - t)$ и положим $\tilde{u}(x,t) = u_0(x,t) - \vartheta(x,t),$ $t \in (k\tau,\, (k+1)\tau)$.

Очевидно, что $\tilde{u}(x,t) \in W(Q^k)$ и $\tilde{u}(x,k\tau) = 0.$ Рассмотрим в Q^k задачу

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - Lu = f(x,t,u+\vartheta, D(u+\vartheta)) - \left(\dfrac{\partial \vartheta}{\partial t} - L\vartheta\right), \\ u\big|_{\partial Q^k} = \varphi(x,t),\ x \in \partial\Omega,\ t \in (k\tau,(k+1)\tau) \\ u(x,k\tau) = \psi(x),\ \ x \in \Omega\ . \end{cases}$$

Функция $\tilde{u}(x,t)$ является решением этой задачи, так как согласно предположению функция $u_0(x,t)$ является решением исходной задачи (1.1). Используя равенство $\|\vartheta\|_{W(Q^k)} = \|u_0\|_{W(Q^{k-1})}$ и оценки $\|\tilde{u}\|_{\infty;Q^k} \le 2\|u_0\|_{\infty,Q}$, аналогично (1.14) получаем

$$\|u_0\|_{W(Q^k)} \le \|\tilde{u} + \vartheta\|_{W(Q^k)} \le C\left(\left\| f(x,t,\tilde{u}+\vartheta, D(\tilde{u}+\vartheta)) - \left(\frac{\partial \upsilon}{\partial t} - L\vartheta\right) \right\|_{p;Q^k} + \right.$$
$$\left. \|u_o\|_{p;Q^k} + \|\psi\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)} + \|\varphi\|_{W_p^{2-\frac{1}{p},1}(\partial Q^k)} \right) \le$$
$$\le C\left(\left\|\hat{b}_\delta\right\|_{p;Q^k} + C_3\left\|\hat{b}_{1,\delta}\right\|_{q,r} \cdot \left\|D(\tilde{u}+\vartheta)\right\|^{\mu_1}_{z_x,z_t,Q^k} + C_5\|\vartheta\|_{W(Q^k)} + \right.$$
$$\left. + C_4\|u_o\|_{\infty;Q^k} + \|\varphi\|_{W_p^{2-\frac{1}{p},1}(\partial Q^k)} + \|\psi\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)} \right) \le$$
$$\le C\left(\left\|\hat{b}_\delta\right\|_{p;Q^k} + \|\tilde{u}+\vartheta\|_{W(Q^k)} \cdot \Phi_1\left(\|\tilde{u}+\vartheta\|_{\infty;(Q^k)}\right) \cdot \left\|\hat{b}_{1,\delta}\right\|_{q,r;Q^k} + \right.$$
$$+ C_5\|u_0\|_{W(Q^{k-1})} + C_4\|u_o\|_{\infty;Q^k} + \Phi_2\left(\|\tilde{u}+\vartheta\|_{\infty;(Q^k)}\right) +$$

$$+\|\psi\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)}+\|\varphi\|_{W_p^{2-\frac{1}{p},1}(\partial Q^k)}\Bigg)=C\Bigg(\left\|\hat{b}_\delta\right\|_{p;Q^k}+\|u_o\|_{W;Q^k}\cdot$$

$$\cdot\Phi_1\left(\|u_o\|_{\infty;Q^k}\right)\cdot\left\|\hat{b}_{1,\delta}\right\|_{q,r;Q_k}+C_4\|u_o\|_{\infty;Q^k}+C_5\|u_o\|_{W(Q^{k-1})}+ \tag{1.16}$$

$$+\Phi_2\left(\|u_o\|_{\infty;Q^k}\right)+\|\psi\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)}+\|\varphi\|_{W_p^{2-\frac{1}{p},1}(\partial Q^k)}\Bigg)$$

Так как коэффициенты $\|u_0\|_{W(Q^k)}$ не превосходит $\frac{1}{2}$, неравенство (1.16) принимает вид

$$\|u_0\|_{W(Q^k)}\le\frac{1}{2}\|u_0\|_{W(Q^k)}+C\cdot C_5\cdot\|u_0\|_{W(Q^{k-1})}+\frac{C^0}{2}.$$

Отсюда

$$\|u_0\|_{W(Q^k)}\le 2C\cdot C_5\cdot\|u_0\|_{W(Q^{k-1})}+C^0.$$

Согласно предположению $\|u_0\|_{W(Q^{k-1})}\le C^{k-1}$, следует $\|u_0\|_{W(Q^k)}\le C^k$.

Применение индукции завершает доказательство теоремы 1.1.

2.Неулучшаемость показателя $\mu_1=2-\frac{n}{q}-\frac{2}{r}$.

Покозатель $\mu_1=2-\frac{n}{q}-\frac{2}{r}$ из условия $A\cdot 2)$ нельзя заменить без дополнительных предположений на $\mu_1>2-\frac{n}{q}-\frac{2}{r}$. Приводится пример краевой задачи вида (1.1), для которой выполнены все условия теоремы 1.1, кроме условия $A\cdot 3)$, т.е. равенств (1.2). Для этого контр примера выполняется соответствующее неравенство и показывается, что утверждение теоремы 1.1. не выполнено.

Пусть $n=1,\quad Q=(-1,1)\times(0,1)$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial u}{\partial t}=b_\varepsilon(x,t)\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^\mu,(x,t)\in Q, \tag{2.1}$$

$$u(-1,t)=\frac{t-2}{(2-t+\varepsilon)^\delta}\equiv\varphi_0(t),\ u(1,t)=\frac{t}{(2-t+\varepsilon)^\delta}\equiv\varphi_1(t),$$
$$t\in(0,1);\ u(x,o)=\frac{x-1}{(x^2+1+\varepsilon)^\delta}\equiv\psi(x),\ x\in(-1,1), \tag{2.2}$$

с $b_\varepsilon(x,t)=\dfrac{\partial^2u/\partial x^2-\partial u/\partial t}{|\partial u/\partial x|^\mu}$. Здесь $0<\varepsilon\le 1,\ 0<\delta<\frac{1}{2}$,

$\mu>2-\frac{n}{q}-\frac{2}{r}=2-\frac{1}{q}-\frac{2}{r},\ q>p, r>p,\ p>1$ и $p>3$.

Эта задача при заданных параметрах имеет единственное решение

$$u(x,t)=\frac{x+t-1}{(x^2+1-t+\varepsilon)^{\delta}}\ .$$

Предположим, что

$$\sum_{i=0}^{1}\|\varphi_i\|_{W_p^{2-\frac{1}{p},1}(\partial Q_T)}+\|\psi\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(-1,1)}\le C_1, \tag{2.3}$$

где положительная постоянная C_1 не зависит от ε, $\varepsilon\in(0,1]$. Положим

$$u(x,t)=\varepsilon\vartheta(y,\tau),\ \ y=\frac{x}{\varepsilon},\ \ \tau=\frac{t}{\varepsilon^2}, \tag{2.4}$$

где $\vartheta\in C^{\infty,1}(R^2)$ и

$$\sup_{R^2}|\vartheta(y,\tau)|<\infty,\ \ \sup_{R^2}|D\vartheta(y,\tau)|<\infty\,. \tag{2.5}$$

Такой выбор функции $u(x,t)$ обеспечивает ограниченность нормы

$$\|u\|_{\infty}=\sup_{Q}|u|\le C\,,$$

где постоянная C не зависит от ε, $\varepsilon\in(0,1]$.

С другой стороны имеем

$$\|u\|_{W(Q)}=\left(\sum_{|\alpha|\le 2}\int_Q|D^{\alpha}u|^p\,dxdt+\int_Q\left|\frac{\partial u}{\partial t}\right|^p dxdt\right)^{\frac{1}{p}}\ge$$

$$\ge\varepsilon^{-1+\frac{1+2}{p}}\cdot\left(\sum_{|\alpha|=2}\int_{Q^{\varepsilon}}|D^{\alpha}\vartheta|^p\,dyd\tau+\int_{Q^{\varepsilon}}\left|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right|^p dyd\tau\right)^{\frac{1}{p}},$$

где $Q^{\varepsilon}=\{(y,\tau)|\ \varepsilon y\in(-1,1),\ \varepsilon^2\tau\in(0,1)\}$. Отсюда для области Q такой, что

$$Q\subseteq Q^{\varepsilon}\quad\text{при}\quad\varepsilon\in(0,1],$$

получаем

$$\|u\|_{W(Q)}=\varepsilon^{-1+\frac{3}{p}}\cdot\left(\sum_{|\alpha|=2}\int_{Q^{\varepsilon}}|D^{\alpha}\vartheta|^p\,dyd\tau+\int_{Q^{\varepsilon}}\left|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right|^p dyd\tau\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда для функции $\vartheta(y,\tau)$ с

$$\sum_{|\alpha|=2}\int_{Q^{\varepsilon}}|D^{\alpha}\vartheta|^p\,dyd\tau+\int_{Q^{\varepsilon}}\left|\frac{\partial\vartheta}{\partial\tau}\right|^p dyd\tau>0$$

и при

$$p>3 \tag{2.6}$$

получаем следующее предельное соотношение
$\|u\|_{W(Q)}\to+\infty$ при $\varepsilon\to 0$ $(\varepsilon>0)$.

Отметим, что из неравенства (2.6) следует вложение

$$W_p^{2,1}(Q)\subset C(\overline{Q}).$$

Для нормы $\|b_{\varepsilon}\|_{q,r;Q}$, имеем

$$\|b_\varepsilon\|_{q,r;Q}=\left(\int_0^1\left(\int_{-1}^1|b_\varepsilon|^q\,dx\right)^{\frac{r}{q}}dt\right)^{\frac{1}{r}}\le\varepsilon^{-2+\mu_1+\frac{1}{q}+\frac{2}{r}}\cdot$$

$$\cdot\left\{\left\|\frac{\partial^2\vartheta/\partial y^2}{|\partial\vartheta/\partial y|^{\mu}}\right\|_{q,r;R^2}+\left\|\frac{\partial\vartheta/\partial\tau}{|\partial\vartheta/\partial y|^{\mu}}\right\|_{q,r;R^2}\right\}.$$

Отсюда при

$$\mu_1>2-\frac{1}{q}-\frac{2}{r} \tag{2.7}$$

получаем, $\|b_\varepsilon\|_{q,r;Q}\le C_1(q,r)$, где постоянная C_1 зависит только от q и r не зависит от $\varepsilon,\ \varepsilon\in(0,1]$.

Таким образом, если $\mu_1>2-\frac{1}{q}-\frac{2}{r}$, то можно выбрать $\delta,\ 0<\delta<\frac{1}{2}$ такое, что $u(x,t)$ является решением задачи (2.1)-(2.2) для любого $\varepsilon>0,\ \|u\|_\infty\le const,\ \|b_\varepsilon\|_{q,r;Q}\le C_1$ равномерно. Однако $\|u\|_{W(Q)}\to+\infty$ при $\varepsilon\to 0$.

Отсюда следует, что при условиях теоремы 1.1. равенства (1.2) нельзя заменить на неравенства (без дополнительных предположений).

3.Теория разрешимости

Рассмотрим краевую задачу (1.1) в вещественном пространстве Соболева $W_p^{2,1}(Q)$ с $p>1$ при условии, что существует априорная оценка $\|u\|_{\infty,Q}$, не зависящая от $\tau\in[0,1]$, для решений параметрического семейства задач

$$\begin{cases} Lu-\dfrac{\partial u}{\partial t}=\tau\cdot f(x,t,u,Du),\ (x,t)\in Q,\\ u\big|_{\partial Q}=\varphi(x,t),\ x\in\partial\Omega,\ t\in(0,T)\\ u(x,0)=\psi(x),\ x\in\Omega\ . \end{cases} \tag{3.1}$$

при некотором $p>1$ и $p>n+2$.

Предположим, что выполнено следующее условие.

$A^*\cdot 4)$. Пусть L есть квазилинейный эллиптический оператор второго порядка с вещественными и непрерывными коэффициентами такие, что линейная краевая задача (1.3) при любых краевых частях

$$g\in L_p(Q),\varphi\in W_p^{2-\frac{1}{p},1}(\partial Q),\ \psi\in W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)$$

однозначно разрешима в пространстве $W_p^{2,1}(Q)$ так, что выполнена оценка

$$\|u\|_{W,Q}\le C\cdot\left(\|g\|_{p;Q}+\|\varphi\|_{W_p^{2-\frac{1}{p},1}(\partial Q)}+\|\psi\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)}\right)$$

с положительной постоянной C, не зависящей от $g\in L_p(Q)$, от

$\varphi \in W_p^{2-\frac{1}{p},1}(\partial Q)$, от $\|\psi\|_{W_p^{2-\frac{2}{p}}(\Omega)}$ и от решения $u \in W_p^{2,1}(Q)$.

Теорема 3.1. Пусть выполнены условия $A \cdot 1) - A \cdot 3), A^* \cdot 4)$. Пусть для параметрического семейства задач (3.1) при $\tau \in [0,1]$ существует априорная оценка $\|u\|_\infty$, не зависящая от τ. Тогда существует решение задачи (1.1) в пространстве $W_p^{2,1}(Q)$ с $p > 1$ и $p > n+2$.

Доказательство. Рассмотрим параметрическое семейство задач (3.1) при $\tau \in [0,1]$. Для этого семейства задач выполнены условия теоремы 1.1, в силу которой существует постоянная C_1, не зависящая от τ, такая, что для любого возможного решения $u(x,t) \in W_p^{2,1}(Q)$ задачи (3.1) выполнено неравенство

$$\|u\|_{W_p^{2,1}(Q)} \le C_1 \forall \tau \in [0,1]. \tag{3.2}$$

Из условия $A^* \cdot 4)$ следует, что линейная краевая задача (1.3) однозначно разрешима и что для ее решения $\tilde{u}(x,t)$ справедливо представление

$$\tilde{u} = \tilde{\vartheta} + \Phi, \tag{3.3}$$

где $\tilde{\vartheta}, \Phi \in W_p^{2,1}(Q)$ такие, что

$$\begin{cases} L_\upsilon \tilde{\vartheta} - \dfrac{\partial \tilde{\vartheta}}{\partial t} = g(x,t), \ (x,t) \in Q, \\ \tilde{\vartheta}\big|_{\partial Q} = 0, \ x \in \partial\Omega, \ t \in (0,T) \\ \tilde{\vartheta}(x,0) = 0, \ x \in \Omega . \end{cases}$$

(так, что $\tilde{\vartheta} = Ag$, Где A- линейный непрерывный оператор из $L_p(Q)$ в $W_p^{2,1}(Q)$), и

$$\begin{cases} L_\vartheta \Phi - \dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = 0, \\ \Phi\big|_{\partial Q} = \varphi(x,t), \ x \in \partial\Omega, \ t \in (0,T) \\ \Phi(x,0) = \psi(x), \ x \in \Omega . \end{cases}$$

Тогда краевая задача (3.1) эквивалентна следующему операторному уравнению:

$$V = \tau \cdot p(V) \tag{3.4}$$

рассматриваемому в банаховом пространстве

$$W_{p,\upsilon}^{2,1}(Q_T) = \left\{ V \in W_p^{2,1}(Q) \middle| V\big|_{\partial Q} = 0, \ x \in \partial\Omega, \ t \in (0,T); V(x,0) = 0, \ x \in \Omega \right\}.$$

Здесь

$$P(V) = A \cdot \widetilde{f}(V + \Phi), \text{ где } \widetilde{f}(u)(x) = f(x, u(x), Du(x)).$$

Оператор $\widetilde{f}$ определен на пространстве $W_p^{2,1}(Q)$ со значениями в $L_p(Q)$ и является вполне непрерывным оператором из $W_p^{2,1}(Q)$ в $L_p(Q)$ (см.[9]). Поэтому оператор ρ является вполне непрерывным оператором, действующим в пространстве $W_{p,0}^{2,1}(Q_T)$.

Для возможных решении $V(x,t)$ из пространства $W_{p,0}^{2,1}(Q_T)$ в силу оценку (3.2) и представления (3.3) выполнено неравенство

$$\|V\|_{W_{p,0}^{2,1}(Q_T)} \le C_2, \ \forall \tau \in [0,1],$$

где C_2 - положительная постоянная, не зависящая ни от V, и ни от τ. Тогда в силу принципа Лере-Шаудера уравнение (3.4) при $\tau = 1$, и следовательно, краевая задача (1.1) имеет решение $u_0(x,t) \in W_p^{2,1}(Q)$.Теорема 3.1. доказано.

Авторы выражают благодарность Б.Билалову и Ф.Мамедову за постоянное внимание к работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бернштейн С.Н. Об уравнениях вариационного исчисления. Собрание сочинений, т.III. – Москва: АН СССР, - 1960, - с.191-241.
2. Ладыженская О.А.. Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. – Москва: Наука, - 1973.
3. Amann H., Grandall M. On some existence theorems for semi-linear elliptic equations. Ind.Univ.Math., j.27, №5, 1978, - p.779-790.
4. Похожаев С.И. Об уравнениях вида $\Delta u = f(x, u, Du)$. Матем. сб., 1980, - т.113(155), - № 2(10), - с.324-338.
5. Похожаев С.И. О разрешимости квазилинейных эллиптических уравнений произвольного порядка. Матем.сб., - 1982, - т.117, - № 2, - с.251-265.
6. Лаптев Г.Г. Априорные оценки сильных решений полулинейных параболических уравнений. Матем.замет., - 1998, - т.64, - с.564-572.
7. Лаптев Г.Г. Об интерполяционном методе получения априорных оценок сильных решений полулинейных параболических систем второго порядка. Труды Мат. Инст. ИМ В.А.Стеклова, 1999, - т.227, - с.180-191.
8. Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н., Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. - Москва: Наука, - 1967.
9. Соболев С.Л. Некоторые применения функционального анализа в математической физике. – Новосибирск: СО АН СССР, - 1962.
10. Friedman A. Partial differential equations. - New York: Academic press, - 1969.
11. Wahl W., Semilinear elliptic and parabolic equations of arbitrary order. Proc.Royal soc.Edinburgh, - 1978,- v.78A, - p.193-207
12. Бесов О.В., Ильин В.А.,Никольский С.М., Интегральные представления функции и теоремы вложения. – Москва: Наука, - 1996.
13. Солонников В.А., О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида. Тр. МИАН, - т.83, - Наука, - 1965.
14. Wahl W., Klassische Losbarkeit im Groben fur nichtlin. parab. system.and Verhalten

der losungen fur $t \to \infty$. Nachr.Acad.Wiss Gottingen Math.Phys.KI.- 1981, - № 5, - p.131-177.
15. Wahl W., Extention of a result of Ladypansk. and Vralceva conserning second order parab. equat. of arbitrary order. Ann. polon. math., - 1983, - v.41, - №1, - p.63-72.

İKİNCİ TƏRTİB KVAZİXƏTTİ PAROBOLİK TƏNLİKLƏR HAQQINDA

R.Ə.AMANOV, A.İ.İSMAYILOV

XÜLASƏ

Sobolev fəzasında bir sinif ikinci tərtib kvazixətti parabolik tənlik üçün birinci sərhəd məsələsi öyrənilir. Tənlik üçün qeyri-xətti göstərici tapılır. Cəmlənən funksiyalar fəzasında mümkün həll üçün birinci aprior qiymət verildikdə, məsələnin mümkün güclü həlli üçün əsas aprior qiymət alınır. Məsələnin güclü həllinin varlığı haqqında teorem isbat olunur.

Açar sözləri: interpolyasiya üsulu, gücün artım göstəricisi

ON QUASILINEAR PARABOLIC EQUATIONS OF THE SECOND ORDER

R.A.AMANOV, A.I.ISMAYILOV

SUMMARY

In this paper, the first boundary value problem for a class of second order quasilinear parabolic equation in Sobelev space is studied.

The condition is founded for nonlinearity in the equation.

The method of abtaining of a priori estimate of the strong solutions is abtained, provided thft a wear a priori estimate u given.

Theregore, The theorem on existence of a strong solution to the problem is proved.

Keywords: interpolation method, power growth exponent

BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2022

УДК 517.9

РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛОКАЛЬНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ТРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Е.Ю.МУСТАФАЕВА, Н.А.АЛИЕВ
Бакинский Государственный Университет
yelenamustafayeva@bsu.edu.az

Излагаемая работа посвящена исследованию решения граничной задачи для трехмерного уравнения смешанного типа с нелокальными граничными условиями. В верхнем полупространстве это уравнение эллиптического типа, или уравнение Лапласа, а в нижнем – гиперболического типа. Выводятся необходимые условия как в эллиптическом, так и в гиперболическом случае, которые регуляризуются по оригинальной схеме.

Ключевые слова. Трехмерное уравнение гиперболического типа, трехмерное уравнение эллиптического типа, нелокальные граничные условия, фундаментальное решение, необходимые условия, регуляризация.

1. Введение

Мы исследовали фредгольмовость многих трехмерных задач с нелокальными граничными условиями как для типовых, так и нетиповых дифференциальных уравнений. В отличие от классических задач мы изучили уравнения как четного, так и нечетного порядков. Граничные условия таковы, что вся граница является носителем для каждого граничного условия.

В 1968-70-х годах мы интересовались несуществованием решений граничных задач. После большой работы с литературой было определено, что решение граничных задач может не существовать по следующим причинам:

1) из-за уравнения задачи;

2) из-за границы области;

3) из-за граничных условий задачи.

Как мы знаем, одним из главных результатов по задачам Коши для дифференциальных уравнений в частных производных является теорема Коши-Ковалевской [1]. Если все данные задачи Коши – аналитические функции, то решение этой задачи является аналитическим.

И.Г.Петровский в 1946 г. на одной из конференций высказал, «что может быть, если отказаться от аналитичности данных». Ответ на этот вопрос принадлежит H.Levi. Он в 1957 г. [2] привел пример, в котором рассматривается трехмерное линейное неоднородное уравнение первого порядка с аналитическими коэффициентами, но с бесконечно дифференцируемой, но не аналитической правой частью, где приведенное уравнение не имеет даже локального решения. Далее этим вопросом занимался Хёрмандер [3],[4] и за эти работы получил в 1962 г. медаль Филдса.

Что касается второй проблемы, А.Лебег занимался этим вопросом в 1913 г. [5]. Он показал, что задача Дирихле для яблоко-подобной области не имеет решения. Позже в 1924 году, он дал класс областей, в которых рассматриваемая краевая задача неразрешима [6]. Далее, данный вопрос был рассмотрен Н. Винером [7], Егоровым [8], А.Новрузовым [9] и И.Мамедовым [10]. Наконец, третий вопрос, поставленный выше, был рассмотрен А.В.Бицадзе [11], Бегером [12]-[14], А.А.Дезиным [15] и Н.А.Алиевым [16]. Все эти работы опираются на некоторые условия и (за исключением [16]) посвящены граничным задачам, а в [15] исследованы только краевые задачи для линейного обыкновенного дифференциального уравнения. В [11], где рассматривается уравнение Лапласа, эти условия называются необходимыми и достаточными. Регуляризация этих условий дана только в двухмерном случае. Утверждение, что регуляризация в трехмерном случае подобна двумерному случаю, неверно.

Что касается работ [12]-[14], то полученные необходимые локальные условия не исследованы, но только предполагается, что в задаче Дирихле (которая для уравнений Коши-Римана некорректна) данная функция удовлетворяет необходимым условиям.

Следует обратить внимание, что для линейного обыкновенного дифференциального уравнения эти необходимые условия являются обычными граничными условиями, а для уравнений в частных производных эти условия имеют вид сингулярных интегральных уравнений. Эти сингулярности имеют специальный вид и не регуляризуются, как в общем случае [17], [18].

2. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$sign\, x_3 \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_3^2} + \left(\frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_2^2} \right) = 0 \qquad (2.1)$$

в трехмерной области $D = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in R^3\}$ с границей Ляпунова Γ, выпуклой в направлении x_3, с нелокальными граничными условиями:

$$l_i u = \sum_{j=1}^{3}\left[\alpha_{ij1}^{(1)}(x')\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_j}\Big|_{x_3=\gamma_1(x')} + \alpha_{ij1}^{(0)}(x')\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_j}\Big|_{x_3=\gamma_0(x')} +\right.$$

$$\left.+\alpha_{ij2}^{(2)}(x')\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_j}\Big|_{x_3=\gamma_2(x')} + \alpha_{ij2}^{(0)}(x')\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_j}\Big|_{x_3=\gamma_0(x')}\right]+$$

$$+\alpha_{i1}^{(1)}(x')u_1(x',\gamma_1(x')) + \alpha_{i1}^{(0)}(x')u_1(x',\gamma_0(x')) +$$

$$+\alpha_{i2}^{(2)}(x')u_2(x',\gamma_2(x')) + \alpha_{i2}^{(0)}(x')u_2(x',\gamma_0(x')) = f_i(x'),$$

$$i = 1,2;\ x' = (x_1, x_2) \in S\ , \tag{2.2}$$

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x),\ x \in D_1, x_3 > 0, \\ u_2(x),\ x \in D_2, x_3 < 0, \end{cases}$$

$$u(x) = f_0(x),\quad x \in L = \overline{\Gamma}_1 \cap \overline{\Gamma}_2\ , \tag{2.3}$$

где область $S \subset Ox_1x_2$ является проекцией области D на плоскость $Ox_1x_2 = Ox'$, Γ_1 и Γ_2 - нижняя и верхняя полуповерхности границы Γ соответственно, определенные следующим образом: $\Gamma_k = \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) : \xi_3 = \gamma_k(\xi'),$ $\xi' = (\xi_1, \xi_2) \in S\}$, где $\xi_3 = \gamma_k(\xi_1, \xi_2), k = 1,2$, - уравнения полуповерхнос-тей Γ_1 и Γ_2 соответственно, функции $\gamma_k(\xi'), k = 1,2$, дважды дифференцируемы по обеим переменным ξ_1, ξ_2 в области *S*; *L* – экватор, соединяющий полуповерхности Γ_1 и Γ_2: $L = \overline{\Gamma}_1 \cap \overline{\Gamma}_2$.

Обозначим $\Gamma_0 = \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) : \xi_3 = \gamma_0(\xi') = 0,\ \xi' = (\xi_1, \xi_2) \in S\}$. Коэффициенты $\alpha_{ijp}^{(k)}(x'),\ \alpha_{ip}^{(k)}(x')$, $i, p = 1,2; j = 1,2,3; k = 0,1$, удовлетворяют условию Гельдера в области *S*, правые части $f_i(x'), i = 1,2$, и $f_0(x)$ – непрерывные функции в S и *L* соответственно.

Линейно независимые граничные условия (2.2) как бы «сшивают» значения искомой функции и ее частных производных первого порядка на верхней и нижней полуповерхностях Γ_1, Γ_2 границы Γ и Γ_0 - проекцией области *D* на плоскость $Ox_1x_2 = Ox'$

Итак, при $x_3 > 0$ имеем уравнение эллиптического типа

$$\Delta u_1(x) = 0,\ x \in D_1, \tag{2.4}$$

причем $\partial D_1 = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, где Γ_1 - верхняя граница области D, Γ_0 - нижняя граница области D_1, лежащая на плоскости $x_3 = 0$ и разделяющая области D_1 и D_2 а при $x_3 < 0$ имеем уравнение гиперболического типа

$$\frac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_3^2} = \frac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2(x)}{\partial x_2^2},\ x \in D_2. \tag{2.5}$$

3.Уравнение эллиптического типа

Сейчас мы собираемся рассмотреть уравнение (2.4):

$$Lu_1 = \Delta u_1(x) = \frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1(x)}{\partial x_3^2} = 0, \qquad (3.1)$$

$$x = (x_1, x_2, x_3) \in D_1,$$

с граничными условиями (2.2).

Без ограничения общности, мы добавляем еще одно граничное условие на множестве меры нуль:

$$u_1(x) = f_0(x),\ x \in \overline{\Gamma}_1 \cap \overline{\Gamma}_2. \qquad (3.2)$$

Здесь Γ_1 и Γ_2 - верхняя и нижняя полуповерхности границы Γ соответственно, определенные следующим образом: $\Gamma_k = \{\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3) : \xi_3 = \gamma_k(\xi'),\ \xi' = (\xi_1, \xi_2) \in S\}$, где $\xi_3 = \gamma_k(\xi_1, \xi_2)$, $k = 0,1,2$, - уравнения поверхностей Γ_0, Γ_1 и Γ_2, функции $\gamma_k(\xi')$, $k = 1,2$, дважды дифференцируемы по обеим переменным ξ_1, ξ_2.

Фундаментальное решение трехмерного уравнения Лапласа имеет вид [19]:

$$U_1(x - \xi) = -\frac{1}{4\pi}\frac{1}{|x - \xi|}. \qquad (3.3)$$

4. Основные соотношения и необходимые условия

Умножая уравнение (3.1) на фундаментальное решение (3.3), интегрируя его по области D_1 и учитывая $\Delta_x U_1(x - \xi) = \delta(x - \xi)$, где $\delta(x - \xi)$ δ-функция Дирака, мы получим **первое основное соотношение**:

$$-\sum_{j=1}^{3}\int_{\Gamma'}\left[\left(\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_j}U_1(x - \xi) - u_1(x)\frac{\partial U_1(x - \xi}{\partial x_j}\right)\cos(\nu, x_j)dx\right] =$$

$$= \int_{D_1} u_1(x)\delta(x - \xi)dx = \begin{cases} u_1(\xi), & \xi \in D_1, \\ \dfrac{1}{2}u_1(\xi), & \xi \in \Gamma'. \end{cases} \qquad (4.1)$$

Первое соотношение в (4.1) дает представление общего решения уравнения (3.1), а второе выражение в (4.1) является **первым необходимым условием**.

Итак, мы доказали теорему:

Теорема 4.1. *Пусть выпуклая вдоль направления* x_3 *область* $D \subset R^3$ *является ограниченной с границей* Γ *- поверхностью Ляпунова. Тогда полученное первое необходимое условие* (4.1) *является регулярным.*

Умножая уравнение (3.1) на $\dfrac{\partial U_1(x-\xi)}{\partial x_i}$, $i=\overline{1,3}$, и интегрируя его по области D_1, мы получаем остальные **три необходимые условия**:

$$\int_\Gamma \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_i}\frac{\partial U_1(x-\xi)}{\partial \nu_x}dx+$$

$$+\int_\Gamma \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_m}\left[\frac{\partial U_1(x-\xi)}{\partial x_i}\cos(\nu_x,x_m)-\frac{\partial U_1(x-\xi)}{\partial x_m}\cos(\nu_x,x_i)\right]dx+$$

$$+\int_\Gamma \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_l}\left[\frac{\partial U_1(x-\xi)}{\partial x_i}\cos(\nu_x,x_l)-\frac{\partial U_1(x-\xi)}{\partial x_l}\cos(\nu_x,x_i)\right]dx=$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{\partial u_1(\xi)}{\partial \xi_i}, & \xi\in D_1,\\[2mm] -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial u_1(\xi)}{\partial \xi_i}, & \xi\in\Gamma',\end{cases}\quad i=\overline{1,3}, \tag{4.2}$$

где числа *i, m, l* составляют перестановку чисел 1,2,3.

Учитывая, что $\dfrac{\partial U_1(x-\xi)}{\partial x_i}=-\dfrac{x_i-\xi_i}{4\pi|x-\xi|^3}=-\dfrac{\cos(x-\xi,x_i)}{4\pi|x-\xi|^2}$, введем обозначения

$$K_{ij}(x,\xi)=\big(\cos(x-\xi,x_i)\cos(\nu_x,x_j)-\cos(x-\xi,x_j)\cos(\nu_x,x_i)\big). \tag{4.3}$$

Выделим сингулярные члены в необходимых условиях (4.1) и (4.2):

$$u_1(\xi',\gamma_k(\xi'))=(-1)^k\frac{1}{2\pi}\int_S\frac{u_1(x)}{|x-\xi|^2}\cos(\nu_x,x-\xi)\Big|_{\substack{x_3=\gamma_k(x')\\ \xi_3=\gamma_k(\xi')}}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+\ldots,k=0,1, \tag{4.4}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u_1}{\partial \xi_i}\Big|_{\xi_3=\gamma_k(\xi')}=\int_S\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_m}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{K_{im}(x,\xi)}{4\pi|x-\xi|^2}\Big|_{\substack{x_3=\gamma_k(x')\\ \xi_3=\gamma_k(\xi')}}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+$$

$$+\int_S\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_l}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{K_{il}(x,\xi)}{4\pi|x-\xi|^2}\Big|_{\substack{x_3=\gamma_k(x')\\ \xi_3=\gamma_k(\xi')}}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+\ldots,i=\overline{1,3},k=0,1. \tag{4.5}$$

Замечание 4.1. Многоточие в (4.4) и (4.5) является суммой несингулярных слагаемых, а в (4.5) содержит производные $\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_l}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}$, $l=1,2,3;k=0,1$, под знаком интеграла.

Введем обозначения:

$$K_{ij}^{(k)}(x',\xi')=K_{ij}(x,\xi)\Big|_{\substack{x_3=\gamma_k(x')\\ \xi_3=\gamma_k(\xi')}},\quad k=0,1, \tag{4.6}$$

а также

$$P_0(x',\xi')=1,$$

$$P_1(x',\xi')=1+\sum_{m=1}^{2}\left(\frac{\partial\gamma_1(x')}{\partial x_m}\right)^2\cos^2(x'-\xi',x_m)+O(|x'-\xi'|), \tag{4.7}$$

откуда мы имеем, что

$$|x-\xi|^2\Big|_{\substack{x_3=\gamma_k(x')\\ \xi_3=\gamma_k(\xi')}}=|x'-\xi'|^2\ P_k(x',\xi'),\ k=0,1\,.$$

Замечание 4.2. Заметим, что при $\xi'=x'$ мы имеем:

$$P_1(x',x')=1+\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_2}\right)^2+2\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_1}\frac{\partial\gamma_1}{\partial x_2}\neq 0\,.$$

При помощи обозначений (4.6), (4.7) перепишем необходимые условия (4.5) для $i=1,2,3, k=0,1$, следующим образом:

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u_1}{\partial\xi_i}\Big|_{\xi_3=\gamma_k(\xi')}=$$

$$=-\int_S\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_m}\Bigg|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{1}{4\pi|x'-\xi'|^2}\frac{K_{im}^{(k)}(x',\xi')}{P_k(x',\xi')}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+$$

$$+\int_S\frac{\partial u_1(x)}{\partial x_l}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')}\frac{1}{4\pi|x'-\xi|'^2}\frac{K_{il}^{(k)}(x',\xi')}{P_k(x',\xi')}\frac{dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+\dots\,. \tag{4.8}$$

Теорема 4.2. *При условиях теоремы* 4.1 *необходимые условия* (4.8) *сингулярны*.

5. Уравнение гиперболического типа

Рассмотрим уравнение (2.5)

$$lu_2(x)=\frac{\partial^2u_2(x)}{\partial x_3^2}-\left(\frac{\partial^2u_2(x)}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2u_2(x)}{\partial x_2^2}\right)=0 \tag{5.1}$$

в трехмерной области $D_2=\{x=(x_1,x_2,x_3),x_3<0\}\subset R^3$ с границей $\Gamma''=\Gamma_2\cup\Gamma_0$,

Фундаментальным решением уравнения (5.1) является [19]

$$U_2(x-\xi)=U_2(x_3-\xi_3,x_1-\xi_1,x_2-\xi_2)=$$

$$=\frac{\theta((x_3-\xi_3)-\sqrt{(x_1-\xi_1)^2-(x_2-\xi_2)^2})}{2\pi\sqrt{(x_3-\xi_3)^2-(x_1-\xi_1)^2-(x_2-\xi_2)^2}}\,. \tag{5.2}$$

Умножим уравнение (5.1) на фундаментальное решение (5.2) и проинтегрируем по области D_2.

Учитывая, что [12] $l_xU_2(x-\xi)=\delta(x-\xi)$, мы получаем первое основное соотношение:

$$\int_{\Gamma''}\left[u_2(x)\frac{\partial U_2(x-\xi)}{\partial x_3}-\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_3}U_2(x-\xi)\right]\cos(\nu_x,x_3)dx-$$

$$-\sum_{j=1}^{2}\int_{\Gamma''}\left[u_2(x)\frac{\partial U_2(x-\xi)}{\partial x_j}-\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_j}U_2(x-\xi)\right]\cos(\nu_x,x_j)dx=\begin{cases}u_2(\xi), & \xi\in D_2,\\ \frac{1}{2}u_2(\xi), & \xi\in\Gamma''.\end{cases} \quad (5.3)$$

Таким образом, нами установлена следующая

Теорема 5.1. *Пусть область* $D_2\subset R^3$ *с границей Ляпунова* Γ'' *ограничена и выпукла в направлении* x_3. *Тогда для уравнения* (5.1) *выполняется первое основное соотношение* (5.3).

Умножая (5.1) на $\frac{\partial U_2(x-\xi)}{\partial x_i}$, $i=\overline{1,3}$, интегрируем по области D_2, получаем 2-ые основные соотношения:

$$\int_{\Gamma''}\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_3}\left(\frac{\partial U_2(x-\xi)}{\partial x_3}\cos(\nu_x,x_i)-\frac{\partial U_2(x-\xi)}{\partial x_i}\cos(\nu_x,x_3)\right)dx+$$

$$+\int_{\Gamma''}\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_i}\frac{\partial U_2(x-\xi)}{\partial x_3}\cos(\nu_x,x_3)dx-$$

$$-\sum_{j=1}^{2}\int_{\Gamma}\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_j}\left(\frac{\partial U_2(x-\xi)}{\partial x_j}\cos(\nu_x,x_i)-\frac{\partial U_2(x-\xi)}{\partial x_i}\cos(\nu_x,x_j)\right)dx-$$

$$-\sum_{j=1}^{2}\int_{\Gamma}\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_i}\frac{\partial U_2(x-\xi)}{\partial x_j}\cos(\nu_x,x_j)dx=\begin{cases}\frac{\partial u_2(\xi)}{\partial \xi_i}, & \xi\in D_2,\\ \frac{1}{2}\frac{\partial u_2(\xi)}{\partial \xi_i}, & \xi\in\Gamma'',\end{cases}\quad i=\overline{1,3}. \quad (5.4)$$

Второе из соотношений (5.4) называется 2-ым необходимым условием.

Итак, нами установлена

Теорема 5.2. *При выполнении условий теоремы* 5.1 *для решения уравнения* (5.1) *выполняются вторые основные соотношения* (5.4).

Легко видеть, что

$$\frac{\partial U_2(x-\xi)}{\partial x_3}=\frac{1}{2\pi}\frac{\delta((x_3-\xi_3)-|x'-\xi'|)}{\sqrt{(x_3-\xi_3)^2-|x'-\xi'|^2}}-\frac{(x_3-\xi_3)\theta((x_3-\xi_3)-|x'-\xi'|)}{2\pi\sqrt{\left((x_3-\xi_3)^2-|x'-\xi'|^2\right)^3}}. \quad (5.5)$$

Точно также для $\frac{\partial U_2(x-\xi)}{\partial x_i}$, $i=1,2$, получим:

$$\frac{\partial U_2(x-\xi)}{\partial x_i}=-\frac{1}{2\pi}\frac{(x_i-\xi_i)\delta((x_3-\xi_3)-|x'-\xi'|)}{|x'-\xi'|\sqrt{(x_3-\xi_3)^2-|x'-\xi'|^2}}+\frac{(x_i-\xi_i)\theta((x_3-\xi_3)-|x'-\xi'|)}{2\pi\sqrt{\left((x_3-\xi_3)^2-|x'-\xi'|^2\right)^3}},\ i=1,2. \quad (5.6)$$

Подставляя (5.6) в необходимые условия (5.3), получим:

$$\frac{1}{2}u_2(\xi)\Big|_{\xi\in\Gamma''}=-\sum_{j=1}^{2}\int_{\Gamma''}\Bigg(u_2(x)\left\{-\frac{1}{2\pi}\frac{(x_j-\xi_j)\delta((x_3-\xi_3)-|x'-\xi'|)}{|x'-\xi'|\sqrt{(x_3-\xi_3)^2-|x'-\xi'|^2}}+\frac{(x_j-\xi_j)\theta((x_3-\xi_3)-|x'-\xi'|)}{2\pi\sqrt{\left((x_3-\xi_3)^2-|x'-\xi'|^2\right)^3}}\right\}-$$

$$-\frac{\theta((x_3-\xi_3)-\sqrt{(x_1-\xi_1)^2-(x_2-\xi_2)^2})}{2\pi\sqrt{(x_3-\xi_3)^2-(x_1-\xi_1)^2-(x_2-\xi_2)^2}}\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_j}\Bigg)\cos(\nu_x,x_j)dx. \qquad (5.7)$$

Так как

$$x_3-\xi_3=\gamma_2(x')-\gamma_2(\xi')=\frac{\partial\gamma_2(x')}{\partial x_1}(x_1-\xi_1)+\frac{\partial\gamma_2(x')}{\partial x_2}(x_2-\xi_2)+o(|x'-\xi'|),$$

вводя новое обозначение

$$K_2(x',\xi')=\sqrt{\sum_{m=1}^{2}\left(\frac{\partial\gamma_2(x')}{\partial x_m}\right)^2\cos^2(x'-\xi',x_m)+O(|x'-\xi'|)} \qquad (5.8)$$

имеем, что

$$(\gamma_2(x')-\gamma_2(\xi'))=|x'-\xi'|\ K_2(x',\xi'). \qquad (5.9)$$

Замечание 5.1. Заметим, что для $\xi'=x'$ мы имеем:

$$K_2(x',x')=\sqrt{\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_2}\right)^2+2\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_1}\frac{\partial\gamma_2}{\partial x_2}}\neq 0.$$

При помощи обозначений (5.8), (5.9) перепишем необходимые условия, выделяя только сингулярные слагаемые:

$$\frac{1}{2}u_2(\xi)\Big|_{\xi\in\Gamma_0}=\frac{1}{2}u_2(\xi',0)=$$

$$=-\sum_{j=1}^{2}\int_S\Bigg(u_2(x',0)\left\{-\frac{1}{2\pi}\frac{(x_j-\xi_j)\delta(-|x'-\xi'|)}{i|x'-\xi'|^2}+\frac{(x_j-\xi_j)\theta((-|x'-\xi'|)}{2\pi i|x'-\xi'|^3}\right\}-$$

$$-\frac{\theta(-|x'-\xi'|)}{2\pi i|x'-\xi'|}\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_j}\Big|_{x_3=0}\Bigg)\cos(\nu_x,x_j)dx'+\ldots \qquad (5.10)$$

и случай, когда $\xi\in\Gamma_2$, $x\in\Gamma_2$:

$$\frac{1}{2}u_2(\xi',\gamma_2(x'))=-\sum_{j=1}^{2}\int_S\Big(u_2(x',\gamma_2(x'))\times$$

$$\times\left\{-\frac{1}{2\pi}\frac{(x_j-\xi_j)\delta(|x'-\xi'|(K_2(x',\xi')-1))}{|x'-\xi'|^2\sqrt{K_2^2(x',\xi')-1}}+\frac{(x_j-\xi_j)\theta(|x'-\xi'|(K_2(x',\xi')-1))}{2\pi|x'-\xi'|^3\sqrt{(K_2^2(x',\xi')-1)^3}}\right\}-$$

$$-\frac{\theta(|x'-\xi'|(K_2(x',\xi')-1))}{2\pi|x'-\xi'|\sqrt{K_2^2(x',\xi')-1}}\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_j}\Big|_{x_3=\gamma_2(x')}\Bigg)\frac{\cos(\nu_x,x_j)dx'}{\cos(\nu_x,x_3)}+\ldots, \qquad (5.11)$$

а также

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u_2(\xi)}{\partial\xi_3}\Big|_{\xi_3=0}=\int_S\frac{\partial u_2(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=0}\frac{1}{2\pi}\frac{\delta(-|x'-\xi'|)}{i|x'-\xi'|}\cos(\nu_x,x_0)dx'-$$

$$-\sum_{j=1}^{2}\int_S \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_j}\Big|_{x_3=0}\left\{\left(-\frac{1}{2\pi}\frac{(x_j-\xi_j)\delta(-|x'-\xi'|)}{i|x'-\xi'|^2}+\frac{(x_j-\xi_j)\theta((-|x'-\xi'|)}{2\pi i|x'-\xi'|^3}\right)\cos(\nu_x,x_0)-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{2\pi}\frac{\delta(-|x'-\xi'|)}{i|x'-\xi'|}\cos(\nu_x,x_j)\right\}dx'-$$

$$-\sum_{j=1}^{2}\int_S \frac{\partial u_2(x)}{\partial x_3}\Big|_{x_3=0}\left[-\frac{1}{2\pi}\frac{(x_j-\xi_j)\delta(-|x'-\xi'|)}{i|x'-\xi'|^2}+\frac{(x_j-\xi_j)\theta(-|x'-\xi'|)}{2\pi i|x'-\xi'|^3}\right]\cos(\nu_x,x_j)dx'+\ldots \quad (5.12)$$

Построим линейные комбинации, $i=1,2;\ \xi'=(x_1,x_2)\in S$, из граничных значений искомых функций и их частных производных при помощи произвольных коэффициентов, $\beta_{ijl}^{(k)}(\xi')$, $k=1,2$, $i=1,2;\ j=\overline{1,3},\ \xi'\in S$, а затем подставим $\beta_{ij}^{(k)}(\xi')$, $k=1,2$, в необходимые условия (4.9), (4.13) и (5.10)-(5.12).

Прибавляя и отнимая $\beta_{ij}^{(k)}(x')$ из $\beta_{ij}^{(k)}(\xi')$, $k=1,2$, $\beta_{ijl}^{(k)}(x')$ из $\beta_{ijl}^{(k)}(\xi')$, $k=1,2$, $i=1,2;\ j=\overline{1,3},\ x',\xi'\in S$, и полагая, что функции $\beta_{ji}^{(k)}(\xi')$ удовлетворяют условию Гельдера, получим слабые сингулярности в интегралах с $\dfrac{\beta_{ji}^{(k)}(\xi')-\beta_{ji}^{(k)}(x')}{2\pi|x'-\xi'|^2}$. Отбрасывая слагаемые со слабыми сингулярностями и разлагая коэффициенты при граничных значениях искомых функций $u_k(x),\ k=1,2$, и их частных производных $\dfrac{\partial u_k(x)}{\partial x_j},\ j=1,2,3;\ k=1,2$, по x' в точке $x'=\xi'$ по формуле Тейлора, мы выделяем только первые слагаемые разложения.

Группируя слагаемые под знаком интеграла и приравнивая коэффициенты при $u_1(x',\gamma_0(x'))$, $u_1(x',\gamma_1(x'))$, $u_2(x',\gamma_0(x'))$, $u_2(x',\gamma_2(x'))$, $\dfrac{\partial u_1(x)}{\partial x_j}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')},\ j=1,2,3;\ k=0,1;\ \dfrac{\partial u_2(x)}{\partial x_j}\Big|_{x_3=\gamma_k(x')},\ j=1,2,3;\ k=0,2$, к соответствующим коэффициентам в граничных условиях (2.2), получим систему из 16 уравнений для неизвестных $\beta_{ij}^{(k)}(x')$, $k=1,2$, $\beta_{ijl}^{(k)}(x')$, $k=1,2$, $i=1,2;\ j=\overline{1,3},\ x'\in S$:

$$\beta_{i1}^{(0)}(x')\left(\frac{\cos(\nu_x,x-\xi)\Big|_{\substack{x_3=\gamma_0(x')\\ \xi_3=\gamma_0(\xi')}}}{2\pi\cos(\nu_x,x_3)}\right)\Bigg|_{\xi'=x'}=\alpha_{i1}^{(0)}(x'), \quad (5.13)$$

$$\beta_{i1}^{(1)}(x')\left(-\frac{\cos(\nu_x,x-\xi)\Big|_{\substack{x_3=\gamma_1(x')\\ \xi_3=\gamma_1(\xi')}}}{2\pi P_1(x',\xi')\cos(\nu_x,x_3)}\right)_{\xi'=x'}=\alpha_{i1}^{(1)}(x'), \quad (5.14)$$

$$\beta_{i2}^{(0)}(x')\left(-\sum_{j=1}^{2}\frac{(x_j-\xi_j)\theta((-|x'-\xi'|)}{\pi i|x'-\xi'|}\cos(\nu_x,x_j)\right)_{\xi'=x'}=\alpha_{i2}^{(0)}(x'), \quad (5.15)$$

$$\beta_{i2}^{(2)}(x')\left(-\sum_{j=1}^{2}\frac{(x_j-\xi_j)\theta(|x'-\xi'|(K(x',\xi')-1))}{2\pi|x'-\xi'|\sqrt{(K^2(x',\xi')-1)^3}}\frac{\cos(\nu_x,x_j)}{\cos(\nu_x,x_3)}\right)\Bigg\|_{\xi'=x'}=\alpha_{i2}^{(2)}(x'), \quad (5.16)$$

$$\beta_{i31}^{(0)}(x')\left[-\frac{K_{31}^{(0)}(x',\xi')}{4\pi P_0(x',\xi')}\frac{1}{\cos(\nu_x,x_3)}\right]\Bigg\|_{\xi'=x'}+\beta_{i21}^{(0)}(x')\left[\frac{K_{21}^{(0)}(x',\xi')}{4\pi P_0(x',\xi')}\frac{1}{\cos(\nu_x,x_3)}\right]\Bigg\|_{\xi'=x'}=\alpha_{i11}^{(0)}(x'), \quad (5.17)$$

$$\beta_{i11}^{(0)}(x')\left[-\frac{K_{12}^{(0)}(x',\xi')}{4\pi P_0(x',\xi')}\frac{1}{\cos(\nu_x,x_3)}\right]\Bigg\|_{\xi'=x'}+\beta_{i31}^{(0)}(x')\left[\frac{K_{32}^{(0)}(x',\xi')}{4\pi P_0(x',\xi')}\frac{1}{\cos(\nu_x,x_3)}\right]\Bigg\|_{\xi'=x'}=\alpha_{i21}^{(0)}(x'), \quad (5.18)$$

$$\beta_{i21}^{(0)}(x')\left[-\frac{K_{23}^{(0)}(x',\xi')}{4\pi P_0(x',\xi')}\frac{1}{\cos(\nu_x,x_3)}\right]\Bigg\|_{\xi'=x'}+\beta_{i11}^{(0)}(x')\left[\frac{K_{13}^{(0)}(x',\xi')}{4\pi P_0(x',\xi')}\frac{1}{\cos(\nu_x,x_3)}\right]\Bigg\|_{\xi'=x'}=\alpha_{i31}^{(0)}(x'), \quad (5.19)$$

$$\beta_{i31}^{(1)}(x')\left[-\frac{K_{31}^{(1)}(x',\xi')}{4\pi P_1(x',\xi')}\frac{1}{\cos(\nu_x,x_3)}\right]\Bigg\|_{\xi'=x'}+\beta_{i21}^{(1)}(x')\left[\frac{K_{21}^{(1)}(x',\xi')}{4\pi P_1(x',\xi')\cos(\nu_x,x_3)}\right]\Bigg\|_{\xi'=x'}=\alpha_{i11}^{(1)}(x'), \quad (5.20)$$

$$\beta_{i11}^{(1)}(x')\left[-\frac{K_{12}^{(1)}(x',\xi')}{4\pi P_1(x',\xi')}\frac{1}{\cos(\nu_x,x_3)}\right]\Bigg\|_{\xi'=x'}+\beta_{i31}^{(1)}(x')\left[\frac{K_{32}^{(1)}(x',\xi')}{4\pi P_1(x',\xi')}\frac{1}{\cos(\nu_x,x_3)}\right]\Bigg\|_{\xi'=x'}=\alpha_{i21}^{(1)}(x') \quad (5.21)$$

$$\beta_{i11}^{(1)}(x')\left[\frac{K_{13}^{(1)}(x',\xi')}{4\pi P_1(x',\xi')}\frac{1}{\cos(\nu_x,x_3)}\right]\Bigg\|_{\xi'=x'}+\beta_{i21}^{(1)}(x')\left[-\frac{K_{23}^{(1)}(x',\xi')}{4\pi P_1(x',\xi')}\frac{1}{\cos(\nu_x,x_3)}\right]\Bigg\|_{\xi'=x'}=\alpha_{i31}^{(1)}(x'), \quad (5.22)$$

$$\beta_{i32}^{(0)}(x')\left[-\frac{(x_1-\xi_1)\theta((-|x'-\xi'|)}{\pi i|x'-\xi'|}\cos(\nu_x,x_0)\right]\Bigg\|_{\xi'=x'}+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\beta_{ij2}^{(0)}(x')\left[\left(\frac{(x_j-\xi_j)\theta(-|x'-\xi'|)}{2\pi i|x'-\xi'|}\right)\cos(\nu_x,x_1)-\left(\frac{(x_1-\xi_1)\theta(-|x'-\xi'|)}{2\pi i|x'-\xi'|}\right)\cos(\nu_x,x_j)\right]\Bigg\|_{\xi'=x'}=\alpha_{i12}^{(0)}(x'), \quad (5.23)$$

$$\sum_{j=1}^{2}\beta_{ij2}^{(0)}(x')\left[\left(\frac{(x_j-\xi_j)\theta(-|x'-\xi'|)}{2\pi i|x'-\xi'|}\right)\cos(\nu_x,x_2)-\left(\frac{(x_2-\xi_2)\theta(-|x'-\xi'|)}{2\pi i|x'-\xi'|}\right)\cos(\nu_x,x_j)\right]\Bigg\|_{\xi'=x'}+$$

$$+\beta_{i32}^{(0)}(x')\left[-\frac{(x_2-\xi_2)\theta((-|x'-\xi'|)}{\pi i|x'-\xi'|}\cos(\nu_x,x_0)\right]\Bigg\|_{\xi'=x'}=\alpha_{i22}^{(0)}(x'), \quad (5.24)$$

$$\sum_{j=1}^{2}\beta_{ij2}^{(0)}(x')\left[-\frac{(x_j-\xi_j)\theta(-|x'-\xi'|)}{2\pi i|x'-\xi'|}\cos(\nu_x,x_3)\right]\Bigg|_{\xi'=x'}+$$

$$+\beta_{i32}^{(0)}(x')\sum_{j=1}^{2}\left[-\frac{(x_j-\xi_j)\theta(-|x'-\xi'|)}{\pi i|x'-\xi'|}\cos(\nu_x,x_j)\right]\Bigg|_{\xi'=x'}=\alpha_{i32}^{(0)}(x'), \qquad (5.25)$$

$$\beta_{i32}^{(2)}(x')\left[\frac{(x_1-\xi_1)\theta(|x'-\xi'|(K(x',\xi')-1))}{\pi|x'-\xi'|\sqrt{(K^2(x',\xi')-1)^3}}+\frac{K(x',\xi')\theta(|x'-\xi'|(K(x',\xi')-1))}{2\pi\sqrt{(K^2(x',\xi')-1)^3}}\frac{\cos(\nu_x,x_1)}{\cos(\nu_x,x_3)}\right]\Bigg|_{\xi'=x'}+$$

$$+\beta_{i12}^{(2)}(x')\left\{\sum_{k=1}^{2}\left[-\frac{(x_k-\xi_k)\theta(|x'-\xi'|(K(x',\xi')-1))}{2\pi|x'-\xi'|\sqrt{(K^2(x',\xi')-1)^3}}\frac{\cos(\nu_x,x_k)}{\cos(\nu_x,x_3)}\right]\Bigg|_{\xi'=x'}+\left[-\frac{K(x',\xi')\theta(|x'-\xi'|(K(x',\xi')-1))}{2\pi\sqrt{(K^2(x',\xi')-1)^3}}\right]\Bigg|_{\xi'=x'}+\right.$$

$$\left.+\left[\left(-\frac{(x_2-\xi_2)\theta(|x'-\xi'|(K(x',\xi')-1))}{2\pi|x'-\xi'|\sqrt{(K^2(x',\xi')-1)^3}}\frac{\cos(\nu_x,x_1)}{\cos(\nu_x,x_3)}+\frac{(x_1-\xi_1)\theta(|x'-\xi'|(K(x',\xi')-1))}{2\pi|x'-\xi'|\sqrt{(K^2(x',\xi')-1)^3}}\frac{\cos(\nu_x,x_2)}{\cos(\nu_x,x_3)}\right)\right]\Bigg|_{\xi'=x'}\right\}=\alpha_{i12}^{(2)}(x'), \quad (5.26)$$

$$\beta_{i12}^{(2)}(x')\left[-\frac{(x_2-\xi_2)\theta(|x'-\xi'|(K(x',\xi')-1))}{2\pi|x'-\xi'|\sqrt{(K^2(x',\xi')-1)^3}}\frac{\cos(\nu_x,x_1)}{\cos(\nu_x,x_3)}+\frac{(x_1-\xi_1)\theta(|x'-\xi'|(K(x',\xi')-1))}{2\pi|x'-\xi'|\sqrt{(K^2(x',\xi')-1)^3}}\frac{\cos(\nu_x,x_2)}{\cos(\nu_x,x_3)}\right]\Bigg|_{\xi'=x'}+$$

$$+\beta_{i22}^{(2)}(x')\sum_{k=1}^{2}\left[-\frac{(x_k-\xi_k)\theta(|x'-\xi'|(K(x',\xi')-1))}{2\pi|x'-\xi'|\sqrt{(K^2(x',\xi')-1)^3}}\frac{\cos(\nu_x,x_k)}{\cos(\nu_x,x_3)}\right]\Bigg|_{\xi'=x'}+$$

$$+\beta_{i32}^{(2)}(x')\left[-\frac{(x_2-\xi_2)\theta(|x'-\xi'|(K(x',\xi')-1))}{\pi|x'-\xi'|\sqrt{(K^2(x',\xi')-1)^3}}-\frac{K(x',\xi')\theta(|x'-\xi'|(K(x',\xi')-1))}{2\pi\sqrt{(K^2(x',\xi')-1)^3}}\frac{\cos(\nu_x,x_2)}{\cos(\nu_x,x_3)}\right]\Bigg|_{\xi'=x'}=$$

$$=\alpha_{i22}^{(2)}(x'), \qquad (5.27)$$

$$\beta_{i32}^{(2)}(x')\left\{\sum_{j=1}^{2}\left[-\frac{(x_j-\xi_j)\theta(|x'-\xi'|(K(x',\xi')-1))}{2\pi|x'-\xi'|\sqrt{(K^2(x',\xi')-1)^3}}\frac{\cos(\nu_x,x_j)}{\cos(\nu_x,x_3)}\right]\Bigg|_{\xi'=x'}+\right.$$

$$\left.+\left[-\frac{(K(x',\xi')-1)(\theta(|x'-\xi'|(K(x',\xi')-1))}{\pi\sqrt{(K^2(x',\xi')-1)^3}}\frac{\cos(\nu_x,x_0)}{\cos(\nu_x,x_3)}\right]\Bigg|_{\xi'=x'}\right\}+$$

$$+\sum_{j=1}^{2}\beta_{ij2}^{(2)}(x')\left\{\left[-\frac{K(x',\xi')\theta(|x'-\xi'|(K(x',\xi')-1))}{\pi\sqrt{(K^2(x',\xi')-1)^3}}\frac{\cos(\nu_x,x_j)}{\cos(\nu_x,x_3)}\right]\Bigg|_{\xi'=x'}+\right.$$

$$\left.+\left[-\frac{(x_j-\xi_j)\theta(|x'-\xi'|(K(x',\xi')-1))}{2\pi|x'-\xi'|\sqrt{(K^2(x',\xi')-1)^3}}\right]\Bigg|_{\xi'=x'}\right\}=\alpha_{i32}^{(2)}(x'). \qquad (5.28)$$

Находя $\beta_{ij}^{(k)}(x')$, $k=1,2$, $\beta_{ijl}^{(k)}(x')$, $k=1,2$, $i=1,2;\, j=\overline{1,3},\, x'\in S$, из системы (5.13)-(5.28), получим равенства (2.2) под знаком интеграла:

$$\beta_{i1}^{(0)}(\xi')u_1(\xi',\gamma_0(\xi'))+\beta_{i1}^{(1)}(\xi')u_1(\xi',\gamma_1(\xi'))+$$
$$+\beta_{i2}^{(0)}(\xi')u_2(\xi',\gamma_0(\xi'))+\beta_{i2}^{(2)}(\xi')u_2(\xi',\gamma_2(\xi'))+$$
$$+\sum_{j=1}^{3}\left[\beta_{ij1}^{(0)}(\xi')\frac{\partial u_1(\xi)}{\partial \xi_j}\Big|_{\xi_3=\gamma_0(\xi')}+\beta_{ij1}^{(1)}(\xi')\frac{\partial u_1(\xi)}{\partial \xi_j}\Big|_{x_3=\gamma_1(\xi')}\right]+$$
$$+\sum_{j=1}^{3}\left[\beta_{ij2}^{(0)}(\xi')\frac{\partial u_2(\xi)}{\partial \xi_j}\Big|_{\xi_3=\gamma_0(\xi')}+\beta_{ij2}^{(2)}(\xi')\frac{\partial u_2(\xi)}{\partial \xi_j}\Big|_{x_3=\gamma_2(\xi')}\right]=$$
$$=\int_S\frac{f_i(x')}{|x'-\xi'|^2}dx'+\ldots,\, i=1,2\,. \tag{5.29}$$

Если

$$f_i(x')\in C^{(1)}(S),\, f_i(x')=0, x'\in\partial S, i=1,2. \tag{5.30}$$

то выражения (5.29) регулярны. Таким образом, полученные сингулярности в необходимых условиях (4.8) и (5.10)-(5.12) мы регуляризовали.

Предположим, что

$$\left(\frac{\cos(\nu_x,x-\xi)\Big|_{\substack{x_3=\gamma_0(x')\\ \xi_3=\gamma_0(\xi')}}}{2\pi\cos(\nu_x,x_3)}\right)\Bigg|_{\xi'=x'}\neq 0\;, \tag{5.31}$$

$$\left(-\frac{\cos(\nu_x,x-\xi)\Big|_{\substack{x_3=\gamma_1(x')\\ \xi_3=\gamma_1(\xi')}}}{2\pi P_1(x',\xi')\cos(\nu_x,x_3)}\right)\Bigg|_{\xi'=x'}\neq 0\,, \tag{5.32}$$

$$\left(-\sum_{j=1}^{2}\frac{(x_j-\xi_j)\theta((-|x'-\xi'|)}{\pi i|x'-\xi'|}\cos(\nu_x,x_j)\right)\Bigg|_{\xi'=x'}=-\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{2}\Big(\cos(x'-\xi',x_j)\cos(\nu_x,x_j)\Big)\Big|_{\xi'=x'}\neq 0\,, \tag{5.33}$$

$$\left(-\sum_{j=1}^{2}\frac{(x_j-\xi_j)\theta(|x'-\xi'|(K(x',\xi')-1))}{2\pi|x'-\xi'|\sqrt{(K^2(x',\xi')-1)^3}}\frac{\cos(\nu_x,x_j)}{\cos(\nu_x,x_3)}\right)\Bigg|_{\xi'=x'}=$$
$$=\left(-\frac{1}{2\pi}\sum_{j=1}^{2}\cos(x'-\xi',x_j)\left(\frac{1}{2}K(x',x')-1\right)\right)\frac{1}{\sqrt{(K^2(x',x')-1)^3}}\frac{\cos(\nu_x,x_j)}{\cos(\nu_x,x_3)}\Bigg)\Bigg|_{\xi'=x'}\neq 0\,. \tag{5.34}$$

Тогда для нахождения коэффициентов при $\beta_{i31}^{(k)}(x')$, $\beta_{i21}^{(k)}(x')$, $\beta_{i11}^{(k)}(x'), k=0,2$, а именно:

$$\Delta_{s1}^{(k)}(x')=(-1)^s\frac{K_{3s}^{(k)}(x',x')}{4\pi P_k(x',x')}\frac{1}{\cos(\nu_x,x_3)}, s=1,2;,\; \Delta_{12}^{(k)}(x')=\frac{K_{21}^{(k)}(x',x')}{4\pi P_k(x',x')}\frac{1}{\cos(\nu_x,x_3)}\,,$$

$$\Delta_{sl}^{(k)}(x')=0, s+l=4, s>0, l>0,\quad \Delta_{23}^{(k)}(x')=\frac{K_{12}^{(k)}(x',x')}{4\pi P_k(x',x')}\frac{1}{\cos(\nu_x,x_3)},$$

$$\Delta_{32}^{(k)}(x')=-\frac{K_{23}^{(k)}(x',x')}{4\pi P_k(x',x')}\frac{1}{\cos(\nu_x,x_3)},\quad \Delta_{33}^{(k)}(x')=\frac{K_{13}^{(k)}(x',x')}{4\pi P_k(x',x')}\frac{1}{\cos(\nu_x,x_3)},$$

допускаем, что:

$$\Delta^{(k)}(x')=\begin{vmatrix}\Delta_{11}^{(k)}(x') & \Delta_{12}^{(k)}(x') & \Delta_{13}^{(k)}(x')\\ \Delta_{21}^{(k)}(x') & \Delta_{22}^{(k)}(x') & \Delta_{23}^{(k)}(x')\\ \Delta_{31}^{(k)}(x') & \Delta_{32}^{(k)}(x') & \Delta_{33}^{(k)}(x')\end{vmatrix}\neq 0. \tag{5.35}$$

Далее для определения коэффициентов при неизвестных $\beta_{i32}^{(0)}(x')$, $\beta_{i22}^{(0)}(x')$, $\beta_{i12}^{(0)}(x')$ принимая обозначения

$$\Delta_{k1}^{(3)}(x')=-\frac{1}{2\pi i}\left(\cos(x'-\xi,x_1)\cos(\nu_x,x_0)\right)\Big|_{\xi'=x'}, k=1,2,$$

$$\Delta_{kk+1}^{(3)}(x')=\frac{1}{4\pi i}\left[\cos(x'-\xi',x_{3-k})\cos(\nu_x,x_k)-\cos(x'-\xi',x_{3-k})\cos(\nu_x,x_2)\right]_{\xi'=x'}, k=1,2,,$$

$$\Delta_{13}^{(3)}(x')=0,\ \Delta_{22}^{(3)}(x')=0,$$

$$\Delta_{31}^{(3)}(x')=\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{2}\left[-\cos(x'-\xi',x_j)\cos(\nu_x,x_j)\right]_{\xi'=x'},$$

$$\Delta_{34-k}^{(3)}(x')=-\frac{1}{4\pi i}\left[\cos(x'-\xi',x_k)\cos(\nu_x,x_k)\right]_{\xi'=x'},\ k=1,2,$$

предполагаем, что:

$$\Delta^{(3)}(x')=\begin{vmatrix}\Delta_{11}^{(3)}(x') & \Delta_{12}^{(3)}(x') & \Delta_{13}^{(3)}(x')\\ \Delta_{21}^{(3)}(x') & \Delta_{22}^{(3)}(x') & \Delta_{23}^{(3)}(x')\\ \Delta_{31}^{(3)}(x') & \Delta_{32}^{(3)}(x') & \Delta_{33}^{(3)}(x')\end{vmatrix}\neq 0. \tag{5.36}$$

Наконец, для определения коэффициентов при неизвестных $\beta_{i32}^{(2)}(x')$, $\beta_{i22}^{(2)}(x')$, $\beta_{i12}^{(2)}(x')$ вводя обозначения:

$$\Delta_{12}^{(4)}(x')=0,$$

$$\Delta_{13}^{(4)}(x')=$$

$$\left\{\frac{1}{4\pi}\sum_{k=1}^{2}\left|-\frac{\cos(x'-\xi,x_k)\left(K(x',x')-1\right)}{\sqrt{\left(K^2(x',x')-1\right)^3}}\frac{\cos(\nu_x,x_k)}{\cos(\nu_x,x_3)}\right|+\left|-\frac{K(x',x')\left(K(x',x')-1\right)}{\sqrt{\left(K^2(x',x')-1\right)^3}}\right|+\Delta_{23}^{(4)}(x')\right\}_{\xi'=x'}$$

$$\Delta_{k1}^{(4)}(x')=$$

$$\frac{(-1)^{k-1}}{2\pi}\left|-\frac{\cos(x'-\xi',x_k)\left(K(x',x')-1\right)}{\sqrt{\left(K^2(x',x')-1\right)^3}}-+\frac{K(x',x')\left(K(x',\xi')-1\right)}{2\sqrt{\left(K^2(x',x')-1\right)^3}}\frac{\cos(\nu_x,x_k)}{\cos(\nu_x,x_3)}\right|_{\xi'=x'}\quad k=1,2,,$$

$$\Delta_{22}^{(4)}(x')=\sum_{k=1}^{2}\left|-\frac{\cos(x'-\xi,x_k)\left(K(x',x')-1\right)}{4\pi\sqrt{\left(K^2(x',x')-1\right)^3}}\frac{\cos(\nu_x,x_k)}{\cos(\nu_x,x_3)}\right|_{\xi'=x'},$$

$$\Delta_{23}^{(4)}(x') =$$

$$\frac{1}{4\pi}\left[-\frac{\cos(x'-\xi', x_2)\big(K(x',x')-1\big)}{\sqrt{\big(K^2(x',x')-1\big)^3}}\frac{\cos(\nu_x, x_1)}{\cos(\nu_x, x_3)}+\frac{\cos(x'-\xi', x_1)\big(K(x',x')-1\big)}{\sqrt{\big(K^2(x',x')-1\big)^3}}\frac{\cos(\nu_x, x_2)}{\cos(\nu_x, x_3)}\right]_{\xi'=x'}$$

$$\Delta_{31}^{(4)}(x') = -\frac{1}{2\pi}\left\{\sum_{j=1}^{2}\left[\frac{\cos(x'-\xi', x_j)\big(K(x',x')-1\big)}{2\sqrt{\big(K^2(x',x')-1\big)^3}}\frac{\cos(\nu_x, x_j)}{\cos(\nu_x, x_3)}\right]+\right.$$

$$\left.\frac{\big(K(x',x')-1\big)^2}{\sqrt{\big(K^2(x',\xi')-1\big)^3}}\frac{\cos(\nu_x, x_3)}{\cos(\nu_x, x_3)}\right\}_{\xi'=x'}$$

$$\Delta_{3k}^{(4)}(x') =$$

$$-\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{K(x',x')\big(K(x',x')-1\big)}{\sqrt{\big(K^2(x',x')-1\big)^3}}\frac{\cos(\nu_x, x_{4-k})}{\cos(\nu_x, x_3)}+\frac{\cos(x'-\xi', x_{4-k})\big(K(x',x')-1\big)}{2\sqrt{\big(K^2(x',x')-1\big)^3}}\right\}_{\xi'=x'}, \quad k=2{,}3,$$

и предполагая, что

$$\Delta^{(4)}(x') = \begin{vmatrix} \Delta_{11}^{(4)}(x') & \Delta_{12}^{(4)}(x') & \Delta_{13}^{(4)}(x') \\ \Delta_{21}^{(4)}(x') & \Delta_{22}^{(4)}(x') & \Delta_{23}^{(4)}(x') \\ \Delta_{31}^{(4)}(x') & \Delta_{32}^{(4)}(x') & \Delta_{33}^{(4)}(x') \end{vmatrix} \neq 0, \tag{5.37}$$

мы приходим к следующему утверждению.

Теорема 5.3. Пусть $D \subset R^3$ ограниченная выпуклая по направлению x_3 область с границей $\Gamma = \partial D = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ поверхностью Ляпунова, имеющей уравнения $x_3 = \gamma_k(x')$, $x' = (x_1, x_2) \in S = \underset{x_3=0}{pr}\, D$, $k = 1{,}2$, граничные условия (2.2) – линейно независимые и коэффициенты граничных условий принадлежат к некоторому классу Гельдера, а их правые части – дифференцируемые функции, равные нулю на границе ∂S. Тогда, если выполняются условия (5.31)-(5.37), соотношения (5.29), $i = 1{,}2$, регулярны.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ковалевская С.В. К теории уравнений в частных производных. Научные статьи. - Москва-Ленинград: АН СССР, - 1948, - 380 с.
2. Levi H. An example of a smooth linear partial differential equation without solution. Ann.Math., - 1957, - vol.66, - №2, - pp.155-158.
3. Hörmander L. Differential operators of principal type, Math.Ann., 140, - 124-146, - 1960.
4. Hörmander L. Differential equations without solution, Math.Ann., 140, - 169-173, - 1960.
5. Lebesgue H. Sur des casdimpossibilite du problem de Dirichlet. Bull.Soc.Math.17, 913, - pp.48-50.

6. Lebesgue H. Observation an sujetdela note de N.Wiener-Conditlons de regularite, conditions dirregularite condtions dimpossibilitedand, le problem Dirichlet-Compt. Remd. De 1 Acad., des, de Pris, - 178, - 1924, - pp.349-354.
7. Wiener N. The Dirichlet problem, J. Math. And Phys., - 1924, - №3, - pp.123-146.
8. Егоров Ю.В. Линейные дифференциальные уравнения главного типа. – Москва: Наука, - 1984, - 359 с.
9. Новрузов А.А. Об одном критерии регулярности граничных точек для линейных и квазилинейных параболических уравнений, Докл.АН СССР, - т. 209, - № 4, - 1973, - сс.785-787.
10. Мамедов И.Г. О регулярности граничных точек для линейных параболических уравнений. Мат. заметки, - т. 20, - № 5, - 1976, - сс.717-723.
11. Бицадзе А.В. Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка. - Москва: Наука, - 1966, - 203 с.
12. Monika-Ramona Costache (Supervisal Prof. Dr.Heinrich Begehr) Basic Boundary Value Problems for the Cauchy-Riemann and the Poisson Equation in a Quarter Diss (Master thesis) June 19, - 2009.
13. Begehr H. and Gaertner E. A Dirichlet problem for the inhomogeneous polyharmonic equation in the upper half plane, Georg.Math. J., - 2007, - vol.14, - N 1, - p.33-51.
14. Begehr H. Boundary value problems in complex analysis I. Boletin de la Asociacion Matematica Venezolana. - Vol.XII, - N1, - 2005, - pp.65-85.
15. Дезин А.А. Общие вопросы краевых задач. – Москва: Наука,- 1980, - 207 с.
16. Алиев Н.А. Исследование решений краевых задач для дифференциальных уравнений в частных производных с общими линейными граничными условиями. Докт.диссерт., - Баку, - 2011, - 270 с.
17. Aliev N.A. and Hosseini S.M. A regularization of Fredholm type singular integral equations, I.J. of Math. and Math Sciences, - 26 (2001), - №2, - p.123-128.
18. Aliev N.A. and Hosseini S.M. Multidimensional singular Fredholm integral equations in a finite domain and their regularization, South East Asian Bulletin Mathematics, - 27, - 2003, - №3, - 395-408.
19. Владимиров В.С. Уравнения математической физики. – Москва: Наука, - 1976, - 480 с.

QARIŞIQ TİP ÜÇÖLÇÜLÜ TƏNLİK ÜÇÜN QEYRİ-LOKAL SƏRHƏD MƏSƏLƏSİNİN HƏLL EDİLMƏLİYİ

Y.Y.MUSTAFAYEVA, N.A.ƏLİYEV

XÜLASƏ

Bu iş qeyri-lokal sərhəd şərtləri ilə qarışıq tipli üçölçülü tənlik üçün sərhəd məsələsinin həllinin öyrənilməsinə həsr edilmişdir. Yuxarı yarım fəzada bu elliptik tipli tənlik və ya Laplas tənliyidir, aşağı yarısında isə hiperbolik tiplidir. İlkin sxem üzrə həm elliptik, həm də hiperbolik hallarda zəruri şərtlərin requlyarizasiyası alınır.

Açar sözlər. Hiperbolik tipli üçölçülü tənlik, elliptik tipli üçölçülü tənlik, qeyri-lokal sərhəd şərtləri, fundamental həll, zəruri şərtlər, həll edilməliyi.

SOLVABILITY OF A NONLOCAL BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A THREE-DIMENSIONAL EQUATION OF A MIXED TYPE

E.Yu.MUSTAFAEVA, N.A.ALIEV

SUMMARY

This work is devoted to the study of the solvability of a boundary value problem for a three-dimensional equation of mixed type with nonlocal boundary conditions. In the upper half-space, this is an equation of elliptic type, or Laplace's equation, and in the lower half, it is of hyperbolic type. Necessary conditions are derived in both elliptic and hyperbolic cases which are regularized according to the original scheme.

Keywords: Three-dimensional equation of hyperbolic type, three-dimensional equation of elliptic type, nonlocal boundary conditions, fundamental solution, necessary conditions, solvability.

BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2022

УДК 517.51

ПЕРИОДИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ОДНОГО КЛАССА НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

М.Г.ПАНАХОВ, Р.О.ГАДЖИЕВА

Бакинский Государственный Университет

rhaciyeva74@gmail.com

В статье рассматривается существование периодических решений нелинейных уравнений гиперболического типа, их нахождение и применение. Доказана теорема о непрерывной зависимости решения задачи от исходных данных.

Ключевые слова: гиперболический тип, нелинейный, Т-цикл, интегральные уравнения, ограниченная последовательность, квадратичное накопление, непрерывная зависимость.

Рассмотрим нелинейную задачу

$$Lu = u_{tx} + a(t,x)u_t + b(t,x)u_x = f(t,x,u), \tag{1}$$

$$u(t,0) = \varphi(t), \tag{2}$$

где $(t,x) \in S = \{(t,x): -\infty < t < +\infty,\ 0 \le x \le l\}$, о нахождении классического решения, периодического по t с периодом T, где $a(t,x)$, $b(t,x)$, $f(t,x,u)$ и $\varphi(t)$ - заданные функции периодичные по t с одинаковыми периодами T.

Аналогичная задача о существовании и периодичности решения рассмотрена в работах $[2,3]$.

Пусть $D = [0,T] \times [0,l]$. Тогда, исходя из периодичности $a(t,x)$, $b(t,x)$, $f(t,x,u)$ и $\varphi(t)$ по t нам нужно найти такую функцию $u(t,x)$, что

$$Lu = f(t,x,u), \quad (t,x) \in D,$$

$$u(t,0) = \varphi(t),\ u(0,x) = u(T,x), u_t(0,x) = u_t(T,x). \tag{3}$$

Пиконе [2] показал, что при непрерывности функций $a(t,x)$, $a_t(t,x)$ и $b(t,x)$ в S существуют функции $\alpha(t,x)$, $\beta(t,x)$ и $\gamma(t,x,u)$, которые в $\forall$ ограниченном подмножестве множества S удовлетворяют условию

$$Lu = f(t,x,u) \equiv \frac{\frac{\partial}{\partial t}\left\{\alpha(t,x)\frac{\partial}{\partial x}[\beta(t,x)u]\right\}}{\alpha(t,x)\beta(t,x)} - \gamma(t,x,u)\ . \qquad (4)$$

Необходимое и достаточное условия для выполнения (4) являются следующие:

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x}\beta(t,x)}{\beta(t,x)} = a(t,x),\ \frac{\frac{\partial}{\partial t}[\alpha(t,x)\beta(t,x)]}{\alpha(t,x)\beta(t,x)} = b(t,x),$$

$$\gamma(t,x,u) = [a_t(t,x) + a(t,x)b(t,x)]u + f(t,x,u).$$

Очевидно, что если функция $u(t,x)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial}{\partial t}\left\{\alpha(t,x)\frac{\partial}{\partial x}[\beta(t,x)u(t,x)]\right\} = F(t,x,u)\ , \qquad (5)$$

где

$$F(t,x,u) = \alpha(t,x)\beta(t,x)\gamma(t,x,u)\,,$$

то

$$Lu = f(t,x,u)$$

и наоборот.

Тогда, пользуясь (5) для некоторых произвольных функций $\Psi(t)$ и $\Phi(x)$, имеем:

$$u(t,x) = \frac{1}{\beta(t,x)}\left\{\Psi(t) + \int_0^x \frac{1}{\alpha(y,\eta)}\left[\Phi(\eta) + \int_0^t F(\xi,\eta,u)d\xi\right]d\eta\right\}. \qquad (6)$$

Таким образом, уравнения (1) и (6) эквивалентны.

Для изложения основных результатов будем предполагать, что выполняются следующие условия:

I. $f(t,x,u)$ непрерывна, имеет непрерывную частную производную по u до второго порядка включительно, равномерно ограничена и T - периодична по t в области $S \times R$, где $R =]-\infty,+\infty[$;

II. $a(t,x)$, $a_t(t,x)$, $b(t,x)$ непрерывны в полосе S ; $a_t(t,x)$ и $b(t,x)$ T - периодичны по t ;

III. $\varphi(t)$ и $\varphi'(t)$ непрерывны в R и $\varphi(t)$ T - периодична;

IV. $b(t,x)$ не меняет своего знака в S. (Для определенности будем считать, что $b(t,x) > 0$ в S).

Теперь с помощью соотношения (6) построим периодическое решение задачи (1)-(2). С этой целью, пользуясь условиями (3), определим $\Psi(t)$ и $\Phi(x)$:

$$\Psi(t) = \varphi(t)\beta(t,0)\,,$$

$$\Phi(x)=\frac{\alpha(0,x)\beta(0,x)}{\alpha(T,x)\beta(T,x)-\alpha(0,x)\beta(0,x)}\cdot\int_0^T F(\xi,x,u)d\xi .$$

Так как $\int_0^T b(\xi,x)d\xi>0$, то $\Phi(x)$ определяется вполне и однозначно.

Наконец, из определения $\alpha(t,x),\ \beta(t,x)$ и $F(t,x,u)$ ясно, что если $u(t,x)$ удовлетворяет (6), то она является решением уравнения

$$u(t,x)=\varphi(t)\exp\left(-\int_0^x a(t,\eta)d\eta\right)+\int_0^x\int_0^T p(\xi,\eta;t,x)\gamma(\xi,\eta,u)d\xi d\eta+$$
$$+\int_0^x\int_0^t q(\xi,\eta;t,x)\gamma(\xi,\eta,u)d\xi d\eta , \qquad (7)$$

где

$$q(\xi,\eta;t,x)=\exp\left(-\int_\eta^x a(t,\eta)d\eta-\int_\xi^T b(\tau,\eta)d\tau\right),\ p(\xi,\eta;t,x)=\frac{q(\xi,\eta;t,x)}{\exp\left(\int_\xi^T b(\tau,\eta)d\tau\right)-1} .$$

Введем следующие обозначения:

$$M=\max_{(t,x)\in D}\left\{|\varphi(t)|\exp\left(-\int_\eta^x a(t,\eta)d\eta\right)\right\},\qquad Q=\max_{(t,x,u)\in D\times R}|f(t,x,u)| ,$$
$$m=\max_{(\xi,\eta),(t,x)\in D}\{p(\xi,\eta;t,x),q(\xi,\eta;t,x)\} ,\qquad \|u\|=\max_{(t,x)\in D}|u(t,x)| ,$$
$$A(x)=\int_0^T|a_t(t,x)+a(t,x)b(t,x)|dt ,\qquad C=(M+2lmQ)\exp\left(2\int_0^l A(x)dx\right),$$
$$I_1=(-C,C)\quad ,\qquad \omega=2lmNT ,$$
$$N=\max_{(t,x,u)\in D\times I_1}\left\{|\gamma(t,x,u)|,|\gamma_u(t,x,u)|,|\gamma_{u^2}(t,x,u)|\right\}.$$

Теперь приступим к доказательству существования решения уравнения (7). С этой целью рассмотрим последовательность $\{u_n(t,x)\}$, определяемую следующими линейными интегральными уравнениями:

$$u_{n+1}(t,x)=\varphi(t)\exp\left(-\int_0^x a(t,\eta)d\eta\right)+\int_0^x\int_0^T p(\xi,\eta;t,x)\cdot\{\gamma(\xi,\eta,u_n)+$$
$$+(u_{n+1}-u_n)\gamma_u(\xi,\eta,u_n)\}d\xi d\eta+\int_0^x\int_0^t q(\xi,\eta;t,x)\cdot\{\gamma(\xi,\eta,u_n)+$$
$$+(u_{n+1}-u_n)\gamma_u(\xi,\eta,u_n)\}d\xi d\eta,\quad n=0,1,2,..., \qquad (8)$$

где

$$u_0(t,x)=\varphi(t)\exp\left(-\int_0^x a(t,\eta)d\eta\right).$$

Теорема 1. Пусть $2\omega<1$ и выполняются условия I-IV. Тогда последовательность $\{u_n(t,x)\}$ ограничена и равномерно квадратично сходится к $u(t,x)$ - единственному решению задачи (1)-(2).

Доказательство. Существование последовательности очевидна.

Из (8) ясно, что

$$\|u_{n+1}\| \le M + \omega(1 + \|u_n\| + \|u_{n+1}\|).$$

Откуда

$$\|u_{n+1}\| \le \frac{M+\omega}{1-\omega} + \frac{\omega}{1-\omega}\|u_n\|.$$

Обычная индукция при водит к неравенству:

$$\|u_{n+1}\| \le \frac{M+\omega}{1-\omega}\left[1 + \frac{\omega}{1-\omega} + \left(\frac{\omega}{1-\omega}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\omega}{1-\omega}\right)^n\right] + \left(\frac{\omega}{1-\omega}\right)^{n+1} d, \qquad (9)$$

где $d = \|u_0\|$.

В силу $2\omega < 1$ получаем, что $\dfrac{\omega}{1-\omega} < 1$ и, следовательно, последовательность $\{u_n(t,x)\}$ ограничена.

Для доказательства квадратичной сходимости сначала установим соотношение:

$$\|u_{n+1} - u_n\| \le \frac{1}{2}\frac{\omega}{1-\omega}\|u_n - u_{n-1}\|^2, \quad n = 1,2,\ldots. \qquad (10)$$

Действительно, из (8) по формуле Тейлора следует

$$u_{n+1}(t,x) - u_n(t,x) = \int_0^x\int_0^T p(\xi,\eta;t,x)[(u_{n+1} - u_n)\gamma_u(\xi,\eta,u_n) +$$

$$+\frac{1}{2}(u_n - u_{n-1})^2\gamma_{u^2}(\xi,\eta,\widetilde{u}_n)]d\xi d\eta + \int_0^x\int_0^T q(\xi,\eta;t,x)[(u_{n+1} - u_n)\times$$

$$\times\gamma_u(\xi,\eta,u_n) + \frac{1}{2}(u_n - u_{n-1})^2\gamma_{u^2}(\xi,\eta,\bar{u}_n)]d\xi d\eta, \qquad (11)$$

где $\widetilde{u}_n$ и $\bar{u}_n$ лежит между u_{n-1} и u_n.

Из (11) имеем

$$\|u_{n+1} - u_n\| \le \omega\|u_{n+1} - u_n\| + \frac{1}{2}\omega\|u_n - u_{n-1}\|^2.$$

Откуда сразу получается неравенство (10). Применяя индукцию к неравенству (10), получим:

$$\|u_{n+1} - u_n\| \le \left(\frac{1}{2}\frac{\omega}{1-\omega}\right)^{2^n-1}\cdot\|u_1 - u_0\|^{2^n}. \qquad (12)$$

Из (8) после несложных вычислений имеем

$$\|u_1 - u_0\| \le \frac{\omega}{1-\omega}. \qquad (13)$$

На основе (12) и (13) в силу условий теоремы ряд $\sum_{n=0}^{\infty}\|u_{n+1} - u_n\|$ сходится. А, это значит, что последовательность $\{u_n(t,x)\}$ сходится равномерно к единственной функции $u(t,x)$, удовлетворяющей уравнению (7), эквивалентному задаче (1)-(2).

Функцию $u(t,x)$, существование которой утверждает теореме 1, можно продолжить по периодичности на всю область S.

Имеет место теорема о непрерывной зависимости единственного решения задачи (1)-(2) от начальной функции $\varphi(t)$.

Теорема 2. Пусть $u^i(t,x)$ $(i=1,2)$ функции, определенные на S, такие, что $Lu^i = f(t,x,u^i),\ u^i(t,0)=\varphi^i(t),\ u^i(t,x)=u^i(t+T,x)$, $(i=1,2)$.

Если $\max\limits_{t\in I}\left|\varphi^2(t)-\varphi^1(t)\right|<\delta$ и $2\omega<1$, то существует число k такое, что

$$\left\|u^2(t,x)-u^1(t,x)\right\|\le k\delta .$$

ЛИТЕРАТУРА

1. Беллман Р., Калаба Р. Квазилинеаризации и нелинейные краевые задачи. - Москва: Мир, - 1968.
2. Aziz A.K., Meyers A.M., Periodic solution of hyperbolic partial differential equations in a strip // Trans. Amer. Math. Soc., 146(1969), - p.167-178.
3. Вейвода О. Нелинейная смешанная задача для дифференциального уравнения // Чехосл. мат. ж., - №3, - т.14 (1964).

BİR SİNİF QEYRİ-XƏTTİ HİPERBOLİK TİP TƏNLİKLƏRİN DÖVRİ HƏLLİ

M.H.PƏNAHOV, R.O.HACIYEVA

XÜLASƏ

Məqalədə hiperbolik tip qeyri-xətti tənliklərin dövri həllərinin varlığı, onun tapılması və tətbiqləri məsələlərinə baxılır. Məsələnin həllinin başlanğıc verilənlərdən kəsilməz asılılığı haqqında teorem isbat edilib.

Açar sözlər: hiperbolik tip tənlik, qeyri-xətti tənlik, T-dövri, inteqral tənliklər, məhdud ardıcıllıq, kvadratik yığılma, kəsilməz asılılıq.

PERIODIC SOLUTION OF ONE CLASS NONLINEAR HYPERBOLIC EQUATIONS

M.G.PANAHOV, R.O.HAJIYEVA

SUMMARY

The article considers the existence of periodic solutions of nonlinear equations of hyperbolic type, its finding and application. A theorem on the constant dependence of the solution of the problem on the initial data is proved.

Keywords: hyperbolic type equation, nonlinear equation, *T*-periodic, integral equations, limited sequence, quadratic accumulation, continuous dependence.

BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2022

MEXANİKA

УДК 517.95

ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЛИНЕАРИЗОВАННОГО УРАВНЕНИЯ ПРОДОЛЬНЫХ ВОЛН В СТЕРЖНЯХ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМ ИНТЕГРАЛЬНЫМ УСЛОВИЯМ

Ю.М.СЕВДИМАЛИЕВ, Я.Т.МЕГРАЛИЕВ
Бакинский Государственный Университет
yusifsev@mail.ru; yashar_aze@mail.ru

В работе исследована одна обратная краевая задача для линеаризованного уравнения продольных волн в стержнях. Сначала исходная задача сводится к эквивалентной (в определённом смысле) задаче, для которой доказывается теорема существования и единственности решения. Далее, пользуясь этими фактами, доказывается существование и единственность классического решения задачи.

Ключевые слова: Обратная краевая задача, линеаризованного уравнения продольных волн, метод Фурье, классическое решение.

1. Введение. Современные проблемы естествознания приводят к необходимости постановки и исследования качественно новых задач, ярким примером которых является класс нелокальных задач для дифференциальных уравнений в частных производных. Исследование таких задач вызвано как теоретическим интересом, так и практической необходимостью.

Среди нелокальных задач можно выделить класс задач с интегральными условиями. Условия такого вида появляются при математическом моделировании явлений, связанных с физика плазмы [1], распространением тепла [2], [3], процессом влагопереноса в капиллярно-простых средах [4], вопросами демографии и математической биологии, а также при исследовании некоторых обратных задач математической физики.

Вопросы разрешимости задач с нелокальными интегральными условиями для уравнений с частными производными изучены в работах [5-7]. Обратные задачи с интегральным условием переопределения для параболических уравнений были исследованы в работах [8,9].

Целью данной работы является доказательство единственности и существования решений обратной краевой задачи для линеаризованного уравнения продольных волн в стержнях с интегральным условиям переопределения.

2. Постановка задачи и её сведение к эквивалентной задаче.

Рассмотрим уравнение[10],

$$u_{tt}(x,t)+u_{ttxx}(x,t)-u_{xx}(x,t)=a(t)u(x,t)+f(x,t) \tag{1}$$

и поставим для него в области $D_T=\{(x,t):0<x<1,0\le t\le T\}$ обратную краевую задачу с граничными условиями:

$$u(x,0)=\varphi(x),\ \ u_t(x,T)=\psi(x) \quad (0\le x\le 1), \tag{2}$$

$$u(0,t)=0,\ u_x(1,t)=0 \ \ (0\le t\le T), \tag{3}$$

и интегральным условием переопределения

$$\int_0^1 u(x,t)dx=h(t) \quad (0\le t\le T), \tag{4}$$

где $f(x,t),\ \varphi(x),\ \psi(x),\ h(t)$-заданные функции, а $u(x,t)$ и $a(t)$- искомые функции.

Условие (4) является нелокальным интегральным условием первого рода, то есть не содержит значений искомого решения в точках границы.

Определение. *Пару* $\{u(x,t),a(t)\}$ *функций* $u(x,t)\in\tilde{C}^{2,2}(\overline{D}_T)$ *и* $a(t)\in C[0,T]$ *удовлетворяющих уравнению (1) в* D_T, *условию (2) в* $[0,1]$ *и условиям (3)-(4) в* $[0,T]$, *назовём классическим решением обратной краевой задачи (1)-(4), где*

$$u(x,t)\in\tilde{C}^{2,2}(D_T)=\left\{u(x,t):u(x,t)\ \in C^2(D_T),u_{ttxx}(x,t)\in C(D_T)\right\}.$$

Для исследования задачи (1)-(4) сначала рассмотрим следующую задачу:

$$y''(t)=a(t)y(t) \quad (0\le t\le T), \tag{5}$$

$$y(0)=0, y'(T)=0, \tag{6}$$

где $a(t)\in C[0,T]$-заданная функция, а $y=y(t)$-искомая функция, причём под решением задачи (5), (6) понимаем функцию $y(t)$, непрерывную на $[0,T]$ вместе со всеми своими производными, входящими в уравнение (5), и удовлетворяющую условиям (5), (6) в обычном смысле.

Справедлива следующая[11]

Лемма 1. *Пусть функция* $a(t)\in C[0,T]$ *такая, что*

$$\|a(t)\|_{C[0,T]}\le R=const.$$

Кроме того,

$$\frac{1}{2}T^2R<1.$$

Тогда задача (5), (6) имеет только тривиальное решение.

Наряду с обратной краевой задачей (1)-(4) рассмотрим следующую вспомогательную обратную краевую задачу. Требуется определить пару $\{u(x,t),a(t)\}$ функций $u(x,t)\in\widetilde{C}^{2,2}(D_T)$ и $a(t)\in C[0,T]$ из (1)-(3) и

$$h''(t)-u_{ttx}(0,t)+u_x(0,t)=a(t)h(t)+\int_0^1 f(x,t)dx \ \ (0\le t\le T). \tag{7}$$

Справедлива следующая

Теорема 1. *Пусть* $\varphi(x),\psi(x)\in C[0,1],\ \ h(t)\in C^2[0,T], h(t)\neq 0$ *при* $t\in[0,T]$, $f(x,t)\in C(\overline{D}_T)$ *и выполняются условия согласования*

$$\int_0^1\varphi(x)dx=h(0)\,,\ \ \int_0^1\psi(x)dx=h'(T)\,. \tag{8}$$

Тогда справедливы следующие утверждения:

1. *Каждое классическое решение* $\{u(x,t),a(t)\}$ *задачи (1)-(4) является и решением задачи (1)-(3), (7);*
2. *Каждое решение* $\{u(x,t),a(t)\}$ *задачи (1)-(3), (7), такое, что для всех*

$$\frac{1}{2}T^2\|a(t)\|_{C[0,T]}<1\,, \tag{9}$$

является классическим решением (1)-(4).

Доказательство. Пусть $\{u(x,t),a(t)\}$ является решением задачи (1)-(4). Из (4) видно, что

$$\frac{d}{dt}\int_0^1 u(x,t)dx=h'(t),\ \ \frac{d^2}{dt^2}\int_0^1 u(x,t)dx=h''(t)\ \ (0\le t\le T)\,. \tag{10}$$

Проинтегрируем уравнение (1) по x от 0 до 1 и учитывая условия (3) имеем:

$$\frac{d^2}{dt^2}\int_0^1 u(x,t)dx-u_{ttx}(0,t)+u_x(0,t)=a(t)\int_0^1 u(x,t)dx+\int_0^1 f(x,t)dx\ \ (0\le t\le T)\,. \tag{11}$$

Отсюда, с учётом (4) и (10), приходим к выполнению (7).

Теперь, предположим, что $\{u(x,t),a(t)\}$ является решением задачи (1)-(3), (7), причём выполнено условие (9). Тогда, из (7) и (11), получаем:

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\int_0^1 u(x,t)dx-h(t)\right)=a(t)\left(\int_0^1 u(x,t)dx-h(t)\right)\ \ (0\le t\le T)\,. \tag{12}$$

Далее, в силу (2) и условий согласования (8), имеем:

$$\begin{cases}\int_0^1 u(x,t)dx-h(0)=\int_0^1\varphi(x)dx-h(0)=0,\\ \int_0^1 u_t(x,T)dx-h'(T)=\int_0^1\psi(x)dx-h'(T)=0.\end{cases} \tag{13}$$

Из (12) и (13), в силу леммы 1, заключаем, что выполняется условие (4). Теорема доказана.

3. **Исследование существования и единственности классического решения обратной краевой задачи.**

Первую компоненту $u(x,t)$ решения $\{u(x,t),a(t)\}$ задачи (1)-(3), (7) будем искать в виде:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)\sin\lambda_k x\ \ (\lambda_k=\frac{\pi}{2}(2k-1)), \tag{14}$$

где

$$u_k(t)=2\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x dx\ \ (k=1,2,\ldots)$$

-дважды непрерывно дифференцируемые функции на отрезке $[0,T]$. Тогда, применяя формальную схему метода Фурье, из (1) и (2) имеем:

$$u_k''(t)-\frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^2-1}u_k(t)=-\frac{1}{\lambda_k^2-1}F_k(t;a,u)\ \ (k=1,2,\ldots;0\le t\le T), \tag{15}$$

$$u_k(0)=\varphi_k,\ u_k'(T)=\psi_k\ \ (k=1,2,\ldots), \tag{16}$$

где

$$F_k(t;u,a)=f_k(t)+a(t)u_k(t),\ f_k(t)=2\int_0^1 f(x,t)\sin\lambda_k x dx,$$

$$\varphi_k=2\int_0^1\varphi(x)\sin\lambda_k x dx,\psi_k=2\int_0^1\psi(x)\sin\lambda_k x dx\quad (k=1,2,\ldots).$$

Решая задачу (15), (16) находим:

$$u_k(t)=\frac{ch(\beta_k(T-t))}{ch(\beta_k T)}\varphi_k+\frac{sh(\beta_k t)}{\beta_k ch(\beta_k T)}\psi_k-\frac{1}{(\lambda_k^2-1)\beta_k}\int_0^T G_k(t,\tau)F_k(\tau;u,a)d\tau, \tag{17}$$

где

$$\beta_k^2=\frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^2-1}>0,$$

$$G_k(t,\tau)=\begin{cases}\dfrac{-1}{2ch(\beta_k T)}[sh(\beta_k(T+t-\tau))-sh(\beta_k(T-(t+\tau)))],\ t\in[0,\tau],\\ -\dfrac{sh(\beta_k(T-(t+\tau)))-sh(\beta_k(T-(t-\tau)))}{2ch(\beta_k T)},\quad t\in[\tau,T].\end{cases} \tag{18}$$

После подстановки выражений из (17) в (14), для определения компоненты $u(x,t)$ классического решения задачи (1)-(3), (7), получаем:

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{ch(\beta_k(T-t))}{ch(\beta_k T)}\varphi_k+\frac{sh(\beta_k t)}{\beta_k ch(\beta_k T)}\psi_k-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(\lambda_k^2-1)\beta_k}\int_0^T G_k(t,\tau)F_k(\tau;u,a)d\tau\right\}\sin\lambda_k x. \tag{19}$$

Теперь, из (7), с учётом (14), имеем:

$$a(t)=h^{-1}(t)\left\{h''(t)-\int_0^1 f(x,t)dx-\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k(u_k''(t)-u_k(t))\right\}. \tag{20}$$

Далее, из (15), с учётом (17), получаем:

$$-\lambda_k^2u_k''(t)+\lambda_k^2u_k(t)=F_k(t;u,a)-u_k''(t)=\frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^2-1}F_k(t;u,a)-\frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^2-1}u_k(t)=$$

$$=\frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^2-1}F_k(t;u,a)-\frac{\lambda_k^2}{\lambda_k^2-1}\left[\frac{ch(\beta_k(T-t))}{ch(\beta_kT)}\varphi_k+\frac{sh(\beta_kt)}{\beta_kch(\beta_kT)}\psi_k-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{(\lambda_k^2-1)\beta_k}\int_0^T G_k(t,\tau)F_k(\tau;u,a)d\tau\right]. \tag{21}$$

Для того, чтобы получить уравнение для второй компоненты $a(t)$ решения $\{u(x,t),a(t)\}$ задачи (1)-(3), (7) подставим выражение (21) в (20):

$$a(t)=h^{-1}(t)\left\{h''(t)-\int_0^1 f(x,t)dx+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k}{\lambda_k^2-1}\left\{F_k(t;u,a)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left[\frac{ch(\beta_k(T-t))}{ch(\beta_kT)}\varphi_k+\frac{sh(\beta_kt)}{\beta_kch(\beta_kT)}\psi_k-\frac{1}{(\lambda_k^2-1)\beta_k}\int_0^T G_k(t,\tau)F_k(\tau;u,a)d\tau\right]\right\}\right\}. \tag{22}$$

Таким образом, решение задачи (1)-(3), (7) свелось к решению системы (19), (22) относительно неизвестных функций $u(x,t)$ и $a(t)$.

Для изучения вопроса единственности решения задачи (1)-(3), (7) важную роль играет следующая лемма

Лемма 2. *Если* $\{u(x,t),a(t)\}$ *- любое решение задачи (1)-(3), (7), то функции*

$$u_k(t)=2\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k xdx \qquad (k=1,2,\ldots)$$

удовлетворяют на $[0,T]$ *системе (17).*

Доказательство. Пусть $\{u(x,t),a(t)\}$ - любое решение задачи (1)-(3), (7). Тогда умножив обе части уравнения (1) на функцию $2\sin\lambda_k x$ $(k=1,2,\ldots)$, интегрируя полученное равенство по x от 0 до 1 и пользуясь соотношениями

$$2\int_0^1 u_{tt}(x,t)\sin\lambda_k xdx=\frac{d^2}{dt^2}\left(2\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k xdx\right)=u_k''(t) \quad (k=1,2,\ldots),$$

$$2\int_0^1 u_{xx}(x,t)\sin\lambda_k xdx=-\lambda_k^2\left(2\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k xdx\right)=-\lambda_k^2u_k(t) \ \ (k=1,.2,..),$$

$$2\int_0^1 u_{ttxx}(x,t)\sin\lambda_k xdx=-\lambda_k^2\int_0^1 u_{tt}(x,t)\sin\lambda_k xdx=$$

$$=-\lambda_k^2\frac{d^2}{dt^2}\left(2\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k xdx\right)=-\lambda_k^2u_k''(t) \ (k=1,.2,..),$$

получаем, что удовлетворяется уравнение (15).

Аналогично, из (2) получаем, что выполняется условие (16).

Таким образом, $u_k(t)$ $(k=1,2,\dots)$ является решением задачи (15), (16). А отсюда, непосредственно следует, что функции $u_k(t)$ $(k=1,2,\dots)$ удовлетворяют на $[0,T]$ системе (17). Лемма доказана.

Очевидно, что если $u_k(t)=2\int\limits_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x dx$ $(k=1,2,\dots)$ является решением системы (17), то пара $\{u(x,t),a(t)\}$ функций $u(x,t)=\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(t)\sin\lambda_k x$ и $a(t)$ является решением системы (19), (22).

Из леммы 2 следует, что имеет место следующее

Следствие. *Пусть система (19), (22) имеет единственное решение. Тогда задача (1)-(3), (7) не может иметь более одного решения, т.е. если задача (1)-(3), (7) имеет решение, то оно единственно.*

Теперь, с целью исследования задачи (1)-(3), (7) рассмотрим следующие пространства:

1. Обозначим через $B_{2,T}^3$ [12], совокупность всех функций $u(x,t)$ вида

$$u(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}u_k(t)\sin\lambda_k x \ (\lambda_k=\frac{\pi}{2}(2k-1)),$$

рассматриваемых в D_T, где каждая из функций $u_k(t)$ непрерывна на $[0,T]$ и

$$J_T(u)\equiv\left\{\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right\}^{\frac{1}{2}}<+\infty .$$

Норму в этом множестве определим так:

$$\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}=J_T(u) .$$

2. Через E_T^3 обозначим пространство, состоящее из топологического произведения

$$B_{2,T}^3\times C[0,T] .$$

Норма элемента $z=\{u,a\}$ определяется формулой

$$\|z\|_{E_T^3}=\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3}+\|a(t)\|_{C[0,T]} .$$

Известно, что $B_{2,T}^3$ и E_T^3 являются банаховыми пространствами.

Теперь рассмотрим в пространстве E_T^3 оператор

$$\Phi(u,a)=\{\Phi_1(u,a),\Phi_2(u,a)\},$$

где

$$\Phi_1(u,a)=\widetilde{u}(x,t)\equiv\sum_{k=1}^{\infty}\widetilde{u}_k(t)\sin\lambda_k x ,$$

$$\Phi_2(u,a)=\widetilde{a}(t),$$

а $\widetilde{u}_k(t)$ $(k=1,2,\dots)$ и $\widetilde{a}(t)$ равны соответственно, правым частям (17) и

(22).

Нетрудно видеть, что

$$\frac{ch(\beta_k(T-t))}{ch(\beta_k T)}<1,\quad \frac{sh(\beta_k t)}{ch(\beta_k T)}<1\,,\quad \frac{sh(\beta_k(T+t-\tau))}{ch(\beta_k T)}<1\quad (t\in[0,\tau]),$$

$$\frac{sh(\beta_k(T-(t+\tau))}{ch(\beta_k T)}<1\,,\qquad \frac{sh(\beta_k(T-(t-\tau))}{ch(\beta_k T)}<1\quad (t\in[\tau,T]),$$

$$1<\beta_k=\frac{\lambda_k}{\sqrt{\lambda_k^2-1}}<\sqrt{2},\ \frac{1}{\sqrt{2}}<\frac{1}{\beta_k}<1,\ \lambda_k^2-1>\frac{1}{2}\lambda_k^2.$$

Учитывая эти соотношения имеем:

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|\widetilde{u}_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}\le 2\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|\varphi_k|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+2\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|\psi_k|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$+4\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k\left|f_k(\tau)\right|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+2T\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}},\tag{23}$$

$$a(t)=h^{-1}(t)\left\{h''(t)-\int_0^1 f(x,t)dx+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda_k}{\lambda_k^2-1}\left\{F_k(t;u,a)-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\left[\frac{ch(\beta_k(T-t))}{ch(\beta_k T)}\varphi_k+\frac{sh(\beta_k t)}{\beta_k ch(\beta_k T)}\psi_k-\frac{1}{(\lambda_k^2-1)\beta_k}\int_0^T G_k(t,\tau)F_k(\tau;u,a)d\tau\right]\right\}\right\}$$

$$\|\widetilde{a}(t)\|_{C[0,T]}\le\|h^{-1}(t)\|_{C[0,T]}\left\{\left\|h''(t)-\int_0^1 f(x,t)dx\right\|_{C[0,T]}+2\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{\frac{1}{2}}\left[\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|\varphi_k|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+\right.\right.$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3|\psi_k|)^2\right)^{\frac{1}{2}}+2\sqrt{T}\left(\int_0^T\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k\left|f_k(\tau)\right|)^2d\tau\right)^{\frac{1}{2}}+2T\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}+$$

$$\left.\left.+\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k\|f_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}+\|a(t)\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\|u_k(t)\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]\right\}.\tag{24}$$

Предположим, что данные задачи (1)-(3), (7) удовлетворяют следующим условиям:

1. $\varphi(x)\in W_2^{(3)}(0,1),\ \varphi(0)=\varphi'(1)=\varphi''(0)=0$.
2. $\psi(x)\in W_2^{(3)}(0,1),\ \psi(0)=\psi'(1)=\psi''(0)=0$.
3. $f(x,t)\in C(\overline{D}_T),\ f_x(x,t)\in L_2(D_T),$
   $f(0,t)=0\ \ (0\le t\le T)$.
4. $h(t)\in C^2[0,T], h(t)\ne 0$ при $t\in[0,T]$.

Тогда, из (23) и (24) соответственно, получаем:

$$\|\widetilde{u}(x,t)\|_{B_{2,T}^3}\le A_1(T)+B_1(T)\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3},\tag{25}$$

$$\|\widetilde{a}(t)\|_{C[0,T]}\le A_2(T)+B_2(T)T\|a(t)\|_{C[0,T]}\|u(x,t)\|_{B_{2,T}^3},\tag{26}$$

где

$$A_1(T)=2\left\|\varphi^{(3)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+2\left\|\psi^{(3)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+2\sqrt{T}\left\|f_x(x,t)\right\|_{L_2(D_T)},\ B_1(T)=2T,$$

$$A_2(T)=\left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\left\{\left\|h''(t)-\int_0^1 f(x,t)dx\right\|_{C[0,T]}+\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-2}\right)^{1/2}\left[\left\|\varphi^{(3)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left\|\psi^{(3)}(x)\right\|_{L_2(0,1)}+2\sqrt{T}\left\|f_x(x,t)\right\|_{L_2(D_T)}+\left\|\left\|f_x(x,t)\right\|_{C[0,T]}\right\|_{L_2(0.1)}\right]\right\},,$$

$$B_2(T)=2\left\|h^{-1}(t)\right\|_{C[0,T]}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\lambda_k^{-4}\right)^{\frac{1}{2}}(T+1).$$

Из неравенств (25), (26) заключаем:

$$\left\|\tilde{u}(x,t)\right\|_{B_{2,T}^3}+\left\|\tilde{a}(t)\right\|_{C[0,T]}\le A(T)+B(T)\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}\left\|u(x,t)\right\|_{B_{2,T}^3}, \tag{27}$$

где

$$A(T)=A_1(T)+A_2(T),\ B(T)=B_1(T)+B_2(T).$$

Итак, можно доказать следующую теорему:

Теорема 2. Пусть выполнены условия1-4 и

$$(A(T)+2)^2B(T)<1. \tag{28}$$

Тогда задача (1)-(3), (7) имеет в шаре $K=K_R(\|z\|_{E_T^3}\le R=A(T)+2)$ пространства E_T^3 единственное решение.

Доказательство. В пространстве E_T^3 рассмотрим уравнение

$$z=\Phi z, \tag{29}$$

где $z=\{u,a\}$, компоненты $\Phi_i(u,a)$ $(i=1,2)$, оператора $\Phi(u,a)$, определены правыми частями уравнений (19) и (22).

Рассмотрим оператор $\Phi(u,a)$ в шаре $K=K_R$ из E_T^3. Аналогично (27) получаем, что для любых $z,z_1,z_2\in K_R$ справедливы оценки:

$$\left\|\Phi z\right\|_{E_T^3}\le A(T)+B(T)\left\|a(t)\right\|_{C[0,T]}\left\|u(x,t)\right\|_{B_{2,T}^3}, \tag{30}$$

$$\left\|\Phi z_1-\Phi z_s\right\|_{E_T^3}\le B(T)R(\left\|a_1(t)-a_2(t)\right\|_{C[0,T]}+\left\|u_1(x,t)-u_2(x,t)\right\|_{B_{2,T}^3}). \tag{31}$$

Тогда из оценок (30) и (31), с учётом (28), следует, что оператор Φ действует в шаре $K=K_R$ и является сжимающим. Поэтому в шаре $K=K_R$ оператор Φ имеет единственную неподвижную точку $\{u,a\}$, которая является решением уравнения (29), т.е. $\{u,a\}$ является в шаре $K=K_R$ единственным решением системы (19) и (22) .

Функция $u(x,t)$, как элемент пространства $B_{2,T}^3$, имеет непрерывные производные $u(x,t), u_x(x,t)$ и $u_{xx}(x,t)$ в $\overline{D}_T$.

Из (22) нетрудно видеть, что

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\left\|u_k''(t)\right\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}\le\sqrt{2}\left\{\left(\sum_{k=1}^{\infty}(\lambda_k^3\left\|u_k(t)\right\|_{C[0,T]})^2\right)^{\frac{1}{2}}+\right.$$

$$+\left\| \left\| a(t)u_x(x,t) + f_x(x,t) \right\|_{C[0,T]} \right\|_{L_2(0,1)} \Big\}.$$

Отсюда следует, что $u_{tt}(x,t)$, $u_{ttx}(x,t)$, $u_{ttxx}(x,t)$, непрерывны в $\overline{D}_T$.

Легко проверить, что уравнение (1) и условия (2), (3) и (7) удовлетворяются в обычном смысле. Следовательно, $\{u(x,t), a(t)\}$ является решением задачи (1)-(3), (7), причём, в силу следствие леммы 2, оно единственное в шаре $K = K_R$. Теорема доказана.

С помощью теорема 1 доказывается следующая

Теорема 3. Пусть выполняются все условия теоремы 2,

$$\frac{1}{2}(A(T)+2)T^2 < 1$$

и выполнены условия согласования

$$\int_0^1 \varphi(x)dx = h(0), \ \int_0^1 \psi(x)dx = h'(T).$$

Тогда задача (1)-(4) имеет в шаре $K = K_R(\|z\|_{E^3_{T,T}} \le A(T)+2)$ из E^3_T единственное классическое решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Самарский А.А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений // Дифференциальные уравнения, - 1980, - т.16, - №11, - с.1925-1935.
2. Cannon J.R. The solution of the heat equation subject to the specification of energy // Quart. Appl. Math., - 1963, - v.5, 21, - p.155-160.
3. Ионкин Н.И. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с неклассическим краевым условием // Дифференциальные уравнения, - 1977, - т.13, - №2, - с.294-304.
4. Нахушев А.М. Об одном приближённом методе решения краевых задач для дифференциальных уравнений и его приближения к динамике почвенной влаги и грунтовых вод // Дифференциальные уравнения, - 1982, - т.18, - №1, - с.72-81.
5. Капустин Н.Ю., Моисеев Е.И.О спектральных задачах со спектральным параметром в граничном условии // Дифференциальные уравнения. - 1997, - т.33, - №1, - с.115-119.
6. Кожанов А.И., Пулькина Л.С. О разрешимости краевых задач с нелокальным граничным условием интегрального вида для многомерных гиперболических уравнений. // Дифференциальные уравнения. - 2006. - т.42, - №9, - с. 1166 - 1179.
7. Гордезиани Д.Г., Авалишвили Г.А. Решения нелокальных задач для одномерных колибаний среды. // Математическое моделирование. - 2000. - т.12, - №1, - с. 94 - 103.
8. Прилепко А.И., Ткаченко Д.С. Свойства решений параболического уравнения и единственность решения обратной задачи об источнике с интегральным переопределением. // Журнал вычислительной математики и математической физики. - 2003, - т.43, - №4, - с. 562–570.
9. Камынин В.Л. Об обратной задаче определения правой части в параболическом уравнении с условием интегрального переопределения. // Математические заметки. - 2005, - т.77, - №4, - с. 522–534.

10. Ерофеев В.И., Кажаев В.В. Семериков Н.П. Волны в стержнях. Дисперсия. Диссипация. Нелинейность. - Москва: ФИЗМАТЛИТ, - 2002. – 208 с.
11. Mehraliyev Yashar T. and Fatma Kanca. An Inverse Boundary Value Problem for a Second Order Elliptic Equation in a Rectangle // Mathematical Modelling and Analysis Pub. - Vol. 19, N2, April 2014, pp. 241–256
12. Худавердиев К.И., Велиев А.А. Исследование одномерной смешанной задачи для одного класса псевдогиперболических уравнений третьего порядка с нелинейной операторной правой частью. - Баку: Чашыоглы, - 2010, - 168 с.

ÇUBUQLARDA UZUNUNA DALĞALARIN XƏTTİLƏŞDİRİLMİŞ TƏNLİYİ ÜÇÜN ƏLAVƏ İNTEQRAL ŞƏRTLİ TƏRS SƏRHƏD MƏSƏLƏSİ

Y.M.SEVDİMALIYEV, Y.T.MEHRƏLİYEV

XÜLASƏ

İşdə çubuqlar üçün əlavə inteqral şərtli tərs sərhəd məsələsi tədqiq edilir. Bunun üçün əvvəlcə qoyulmuş məsələ ekvivalent məsələyə gətirilir və bu məsələnin həllinin varlıq və yeganəliyi isbat edilir. Sonra isə ekvivalentlikdən istifadə edərək ilk qoyulmuş məsələnin həllinin varlıq və yeganəliyi isbat edilir.

Açar sözlər: Tərs sərhəd məsələsi, uzununa dalğaların xəttiləşdirilmiş tənliyi, Furye üsulu, klassik həll.

INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR THE LINEARIZED EQUATION OF LONGITUDINAL WAVES IN RODS WITH ADDITIONAL INTEGRAL CONDITIONS

Yu.M. SEVDIMALIYEV, Y.T.MEHRALIYEV

SUMMARY

In the work, one inverse boundary value problem for the linearized equation of longitudinal waves in rods is investigated. For this reason, first of all the initial problem reduces to the equivalent problem, for which the theorem of existence and uniqueness proves. Then using these facts the existence and uniqueness of the classical solution of initial problem is proved.

Keywords: Inverse boundary problem, linearized equation of longitudinal waves in rods, method Fourier, classic solution.

УДК 620.194.2

ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ ВЯЗКОПОВРЕЖДАЮЩЕГОСЯ СТЕРЖНЯ ПРИ ОТСУТСТВИИ ЭФФЕКТА ЗАЛЕЧИВАНИЯ ДЕФЕКТОВ

М.А.МАМЕДОВА
Институт Математики и Механики
meri.mammadova@gmail.com

Исследования колебаний механических систем со сложными реологическими свойствами, как правило, приводятся к сложным математическим задачам. Решение этих задач аналитически не представляется возможным и поэтому единственный путь их решения – это численный. Но это порой ограничивает обозримость полученных решений и не позволяет широко использовать их в практике, ибо для инженерных нужд необходимо иметь относительно простые, замкнутые формулы. С этой целью актуальным является путь приближённого учёта неодномерности, с построением квазиодномерной модели для, вообще говоря, неодномерной задачи. Демонстрацией подобного является модель изгиба стержня, в котором инерция поперечного движения учтена в виде дополнительного слагаемого. В статье используя эту модель, исследованы изгибные колебания вязкоповреждающегося стержня при отсутствии эффекта залечивания дефектов. В качестве модели повреждающегося тела принята наследственная модель повреждаемости.

Ключевые слова: колебания, повреждаемость, инерция поперечного движения, амплитудно-частотная характеристика.

I. Введение

Наряду с продольными колебаниями наиболее распространенными в технике и промышленности являются изгибные колебания. В [3] исследованы изгибные колебания наследственно-упругого стержня конечной длины, когда в качестве ядра ползучести взято слабосингулярное ядро Абеля. Проанализированы резонансные частоты для значений параметра α ядра Абеля близких к единице.

Повреждаемость является одним из факторов, необходимо учитываемых при расчётах элементов конструкций на прочность и долговечность. При переменных нагрузках этот фактор может оказаться весьма влиятельным. В данной статье используется наследственная теория повреждаемости [4].В одномерной постановке физическое соотношение этой теории имеет вид:

$$\varepsilon(t)=\frac{1}{E}\left\{\sigma(t)+\sum_{k=1}^{n}\Phi_k\left(t_k^+\right)\int_{t_k^-}^{t_k^+}K\left(t_k^+-\tau\right)\sigma(\tau)d\tau+\int_{t_{n+1}^-}^{t}K\left(t-\tau\right)\sigma\left(\tau\right)d\tau\right\}. \qquad (1.1)$$

Здесь $K\left(t-\tau\right)$ -ядро оператора повреждаемости, которое может быть записано в краткой форме:

$$K^*\sigma=\sum_{k=1}^{n}\Phi_k\left(t_k^+\right)\int_{t_k^-}^{t_k^+}K\left(t_k^+-\tau\right)\sigma(\tau)d\tau+\int_{t_{n+1}^-}^{t}K\left(t-\tau\right)\sigma(\tau)d\tau. \qquad (1.2)$$

Также $\Phi_k\left(t_k^+\right)$ -функция залечивания дефектов, зависящая от накопленной за период активного нагружения $\left(t_k^-;t_k^+\right)$ объёма дефектов. Значение $\Phi_k\left(t_k^+\right)=0$ соответствует полному залечиванию дефектов, значение же $\Phi_k\left(t_k^+\right)=1$ соответствует отсутствию подобного явления.

С учётом обозначения (1.2) из (1.1) получим:

$$\varepsilon(t)=\frac{1}{E}\left\{\sigma(t)+K^*\sigma(t)\right\} \qquad (1.3)$$

или

$$\varepsilon(t)=\frac{1}{E}\left(1+K^*\right)\sigma(t) \qquad (1.4)$$

обозначив

$$\frac{1}{\tilde{E}}=\frac{1}{E}(1+K^*) \qquad (1.5)$$

Формуле (1.3) придадим вид

$$\varepsilon=\frac{1}{\tilde{E}}\sigma.$$

В дальнейшем будем полагать отсутствие явления залечивания дефектов. Тогда оператор повреждаемости (1.2) носит обычный характер интегрального оператора наследственной теории упругости и к нему могут быть применимы все соответствующие методы и законы линейной вязкоупругости.

В данной работе исследуется задача изгибных колебаний, но с учётом инерции вращения элемента стержня вокруг оси, перпендикулярной плоскости изгиба стержня. Подобное уравнения для изгибных волн имеет вид [1]:

$$\rho J=\frac{\partial^4 W_1}{\partial x_1^2\partial t_1^2}=EJ\frac{\partial^4 W_1}{\partial x_1^4}+\rho S\frac{\partial^2 W_1}{\partial t_1^2}. \qquad (1.6)$$

Здесь W_1 -прогиб стержня, x_1 -продольная координата, ρ -плотность, S -площадь поперечного сечения, E -модуль Юнга, $J=r_0^2S$ -момент инерции сечения стержня, r_0 -радиус инерции поперечного сечения, который для кругового поперечного сечения равен $r_0 = R/\sqrt{2}$ and t_1 -время.

II. Постановка задачи

Для получения соответствующего уравнения движения для наследственно-упругого стержня применим к уравнению (1.6) принцип Вольтера-Работнова, тогда получим:

$$\frac{\rho r_0^2}{\widetilde{E}} = \frac{\partial^4 W_1}{\partial x_1^2 \partial t_1^2} = r_0^2 \frac{\partial^4 W_1}{\partial x_1^4} + \frac{\rho}{\widetilde{E}} \frac{\partial^2 W_1}{\partial t_1^2} \quad , \tag{2.1}$$

где оператор $\widetilde{E}$ определяется согласно (1.4). В этом случае имеем:

$$-r_0^2 = \frac{\partial^4 W_1}{\partial x_1^2 \partial t_1^2} + \frac{\partial^4 W_1}{\partial x_1^4} - r_0^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} K^* \frac{\partial^2 W_1}{\partial t_1^2} + C_0^2 r_0^2 \frac{\partial^4 W_1}{\partial x_1^4} = 0$$

примем в качестве ядра ползучести слабосингулярное ядро Абеля:

$$I_\alpha = \frac{\beta}{\Gamma(1-\alpha)} t^{-\alpha}, \; 0 \le \alpha < 1,$$

где $\Gamma(1-\alpha)$ -гамма-функция Эйлера .

Введём следующие безразмерные величины:

$$x = \frac{x_1}{r_0}; \qquad \eta = \frac{\beta r_0^{1-\alpha}}{C_0^{1-\alpha}},$$

где

$$C_0 = \sqrt{\frac{E}{\rho}}; \qquad t = \frac{t_1 C_0}{r_0}; \qquad W = \frac{W_1}{W_0}. \tag{2.2}$$

Тогда будем иметь в безразмерных величинах следующее уравнение изгибных колебаний:

$$-\frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial t^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} + \frac{\eta}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{\partial^2}{\partial x^2} \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{(t-\tau)^\alpha} \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} d\tau - \frac{\eta}{\Gamma(1-\alpha)} \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{(t-\tau)^\alpha} \frac{\partial^2 W}{\partial \tau^2} d\tau + \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} = 0 \tag{2.3}$$

Граничные условия в безразмерных величинах, соответствующие рассматриваемой задаче, будут:

$$W(0,t) = \cos \omega t; \qquad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\Big|_{x=0} = 0, \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\Big|_{x=l/r_0} = \frac{\partial^3 W}{\partial x^3}\Big|_{x=l/r_0} = 0 \tag{2.5}$$

Первые два условия (2.4) соответствуют отсутствию изгибающего момента на левом торце и заданию на нем вынуждающих поперечных колебаний с частотой ω и амплитудой W_0. Граничные условия (2.5) соответствуют отсутствию усилий на правом торце стержня-изгибающего момента и перерезывающей силы.

Будем искать решение задачи (2.3)-(2.5) в виде ряда:

$$W(x,t)=\sum_{k=1}^{\infty}W_k(x,\gamma_k)e^{-i\gamma_k t}. \qquad (2.6)$$

Подставляя представление (2.6) в (2.3) для функций $W_k(x,\gamma_k)$ получим следующее обыкновенное дифференциальное уравнение четвёртого порядка с постоянными комплексными коэффициентами вида:

$$\frac{d^4W_k}{dx^4}+\lambda_k^2\frac{d^2W_k}{dx^2}-\lambda_k^2W_k=0, \qquad (2.7)$$

где

$$\lambda_k^2=\gamma_k^2\left(1-\eta\frac{i^{1-\alpha}}{\gamma_k^2}\right). \qquad (2.8)$$

Поиск решения уравнения (2.7) в виде $W_k=e^{P_k x}$ приводит к следующему характеристическому уравнению:

$$P_k^4+\lambda_k^2P_k^2-\lambda_k^2=0. \qquad (2.9)$$

Здесь рассмотрим два случая. Первый, когда $\gamma_k>0$, тогда

$$\lambda_k^2=A_k-iE_k, \qquad (2.10)$$

где

$$A_k=\gamma_k^2-\eta\gamma_k^{1+\alpha}\sin\frac{\pi\alpha}{2};\quad E_k=\eta\gamma_k^{1+\alpha}\cos\frac{\pi\alpha}{2}. \qquad (2.11)$$

В случае же $\gamma_k<0$ получим:

$$\lambda_k^2=A_k+iE_k. \qquad (2.12)$$

Корни характеристического уравнения (2.9) при $\gamma_k>0$ будут:

$$\begin{gathered}
P_k^{(1)}=-P_k^{(2)}=S_k^{(1)}+i\rho_k^{(1)};\qquad P_k^{(3)}=-P_k^{(4)}=S_k^{(2)}-i\rho_k^{(2)};\\
S_k^{(n)}=\left[\left(r_k^{(n)}+\alpha_k^{(n)}\right)/2\right]^{\frac{1}{2}};\qquad \rho_k^{(n)}=\left[\left(r_k^{(n)}-\alpha_k^{(n)}\right)/2\right]^{\frac{1}{2}};\\
r_k^{(n)}=\sqrt{\alpha_k^{(n)2}+\beta_k^{(n)2}};\qquad r_k=\left(a_k^2+b_k^2\right)^{\frac{1}{2}};\\
\alpha_k^{(1)}=\frac{1}{2}\left(-A_k+\left[\left(r_k+a_k\right)/2\right]\right)^{\frac{1}{2}};\qquad \beta_k^{(1)}=\frac{1}{2}\left(E_k+\left[\left(r_k-a_k\right)/2\right]\right)^{\frac{1}{2}};\\
\alpha_k^{(2)}=-\frac{1}{2}\left(A_k+\left[\left(r_k+a_k\right)/2\right]\right)^{\frac{1}{2}};\qquad \beta_k^{(2)}=\frac{1}{2}\left(E_k-\left[\left(r_k-a_k\right)/2\right]\right)^{\frac{1}{2}};\\
a_k=A_k^2+4A_k-E_k^2;\qquad b_k=2A_kE_k+4E_k.
\end{gathered} \qquad (2.13)$$

Для $\gamma_k<0$ корни уравнения (2.9) будут:

$$\begin{cases}P_k^{(1)}=-P_k^{(2)}=S_k^{(1)}-i\rho_k^{(1)};\\ P_k^{(3)}=-P_k^{(4)}=S_k^{(2)}+i\rho_k^{(2)}.\end{cases} \qquad (2.14)$$

Теперь решение дифференциального уравнения (2.7) запишется в виде:

$$W_k(x,\gamma_k)=C_k^{(1)}chP_k^{(1)}x+C_k^{(2)}chP_k^{(1)}x+C_k^{(3)}chP_k^{(3)}x+C_k^{(4)}chP_k^{(3)}x; \qquad (2.15)$$

где постоянные $C_k^{(n)}$, вообще говоря, комплексные, определяются из граничных условий. Исходя из граничных условий (2.4), (2.5), для функции $W_k(x,\gamma_k)$ примем следующие условия:

$$W_k(0)=\frac{1}{2};\qquad \frac{\partial^2 W_k}{\partial x^2}\Big|_{x=0}=0; \tag{2.16}$$

$$\frac{\partial^2 W_k}{\partial x^2}\Bigg|_{x=\frac{1}{r_0}}=\frac{\partial^3 W_k}{\partial x^3}\Bigg|_{x=\frac{1}{r_0}}=0.$$

При учёте полученных выражений для W_k в (2.6) граничные условия (2.5) на правом торце и второе из граничных условий (2.4) на левом торце выполняется. Остается, чтобы полное решение (2.6) удовлетворяло оставшемуся граничному условию (2.4). Для этого ограничимся в ряде (2.6) двумя первыми членами, положив $\gamma_1=\omega;\gamma_2=-\omega$. Из того же представления (2.6) убеждаемся в удовлетворении оставшегося граничного условия (2.4):

$$W(0,t)=W_1(0)e^{-i\omega t}+W_2(0)e^{i\omega t}=\frac{1}{2}\left(e^{-i\omega t}+e^{i\omega t}\right)=\cos\omega t \tag{2.17}$$

Тогда решение (2.6) дифференциального уравнения (2.3) с граничными условиями (2.4), (2.5) получим в виде:

$$W(x,t)=W_1(x,\omega)e^{-i\omega t}+W_2(x,-\omega)e^{i\omega t} \tag{2.18}$$

Или в компактной, удобной для практического использования форме:

$$W(x,t)=2R(x,\omega)\cos[\omega t-\theta(x,\omega)]. \tag{2.19}$$

Полученное выражение для зависимости амплитуды R от частоты ω имеет очень громоздкий вид. Однако для большинства реальных материалов оно может быть упрощено. Для большинства материалов показатель сингулярности ядра Абеля α очень близок к единице. Тогда имеем:

$$\begin{cases} A=\omega^2-\eta\omega^{1+\alpha};\quad E=0 \\ a=\left(\omega^2-\eta\omega^{1+\alpha}\right)^2+\left(\omega^2-\eta\omega^{1+\alpha}\right);\quad b=0 \\ \alpha^{(1)}=\dfrac{1}{2}\left[a^{\frac{1}{2}}-\left(\omega^2-\eta\omega^{1+\alpha}\right);\quad \beta^{(1)}=0\right. \\ \alpha^{(2)}=\dfrac{1}{2}\left[a^{\frac{1}{2}}+\left(\omega^2-\eta\omega^{1+\alpha}\right);\quad \beta^{(2)}=0\right. \\ r^{(n)}=\alpha^{(n)};\quad S^{(m)}=\sqrt{\alpha^{(m)}};\qquad \rho^{(n)}=0. \end{cases} \tag{2.20}$$

$$P^{(1)}=-P^{(2)}=\sqrt{\alpha^{(1)}};\qquad P^{(3)}=-P^{(n)}=\sqrt{\alpha^{(2)}}. \tag{2.21}$$

Для амплитуды колебания получим следующее упрощённое выражение:

$$2R=\phi_1 sh\sqrt{\alpha^{(1)}}x+\phi_2 ch\sqrt{\alpha^{(1)}}x+\phi_3 sh\sqrt{\alpha^{(2)}}x+\phi_4 ch\sqrt{\alpha^{(2)}}x, \tag{2.22}$$

где

$$\phi_1 = \frac{\left\{\sqrt{\alpha^{(2)}} + \sqrt{\alpha^{(1)}}\, sh\sqrt{\alpha^{(1)}}\,\frac{1}{r_0}\, sh\sqrt{\alpha^{(2)}}\,\frac{1}{r_0} + \sqrt{\alpha^{(2)}}\, ch\sqrt{\alpha^{(1)}}\,\frac{1}{r_0}\, ch\sqrt{\alpha^{(2)}}\,\frac{1}{r_0}\right\}\alpha^{(2)}}{\left[\sqrt{\alpha^{(1)}}\, sh\sqrt{\alpha^{(2)}}\,\frac{1}{r_0}\, ch\sqrt{\alpha^{(1)}}\,\frac{1}{r_0} - \sqrt{\alpha^{(2)}}\, sh\sqrt{\alpha^{(1)}}\,\frac{1}{r_0}\, ch\sqrt{\alpha^{(2)}}\,\frac{1}{r_0}\right]\left(\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}\right)};$$

$$\phi_2 = \frac{\alpha^{(1)}}{\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}}\,\frac{\sqrt{\alpha^{(1)}} + \sqrt{\alpha^{(2)}}\, sh\sqrt{\alpha^{(1)}}\,\frac{1}{r_0}\, sh\sqrt{\alpha^{(2)}}\,\frac{1}{r_0} - \sqrt{\alpha^{(1)}}\, ch\sqrt{\alpha^{(1)}}\,\frac{1}{r_0}\, ch\sqrt{\alpha^{(2)}}\,\frac{1}{r_0}}{\sqrt{\alpha^{(1)}}\, sh\sqrt{\alpha^{(2)}}\,\frac{1}{r_0}\, ch\sqrt{\alpha^{(1)}}\,\frac{1}{r_0} - \sqrt{\alpha^{(2)}}\, sh\sqrt{\alpha^{(1)}}\,\frac{1}{r_0}\, ch\sqrt{\alpha^{(2)}}\,\frac{1}{r_0}}; \qquad (2.23)$$

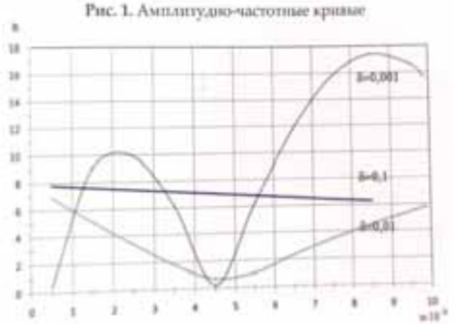
$$\phi_3 = -\frac{\alpha^{(2)}}{\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}}; \qquad \phi_4 = -\frac{\alpha^{(1)}}{\alpha^{(1)} - \alpha^{(2)}}.$$

III. Численная реализация

На основе представления (2.22) были построены амплитудно-частотные кривые для свободного от усилий правого торца стержня. Численная реализация была проведена для следующих значений параметров:

$$\alpha = 0{,}7; \quad \beta\left(\frac{1}{\omega}\right)^{1-\alpha} = 0{,}1; \quad \delta = \frac{r_0}{l} = 0{,}001,\ 0{,}01;\ 0{,}1.$$

Рис. 1. Амплитудно-частотные кривые



IV. Заключение

Как следует из графика, учёт инерции вращения элемента стержня относительно оси перпендикулярной плоскости изгиба приводит к сглаживанию амплитудно-частотной кривой.

В пределах исследуемых частот уменьшение параметра η, характеризующего инерцию вращения, от значения $5{,}13\cdot10^{-3}$ до $1{,}29\cdot10^{-3}$ приводит к возникновению двух ярко выраженных резонансных частот.

ЛИТЕРАТУРА

1. Бреховских Л.М., Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред. – Москва: Наука, - 1982, - 335 с.
2. Работнов Ю.Н. Элементы наследственной механики твёрдых тел. – Москва: Наука, - 1977, - с.384.

3. Суворова Ю.В. Нелинейно-наследственные модели деформирования и разрушения конструкционных материалов. Докторская диссертация. – Москва: ГНИИМАШ, - 1979, - 399 с.
4. Суворова Ю.В., Ахундов М.Б. Длительное разрушение изотропной среды в условиях сложного напряжённого состояния. Машиноведение. АН СССР, - 1986, - №4, - с. 40-46.

DEFEKTLƏRİN BƏRPA PROSESİNİN OLMADIĞI HAL ÜÇÜN ÖZLÜZƏDƏLƏNƏN ÇUBUĞUN ƏYİLMƏ RƏQSLƏRİNİN TƏDQİQİ

M.Ə.MƏMMƏDOVA

XÜLASƏ

Mürəkkəb reoloji xassələrə malik mexaniki sistemlərin rəqsi hərəkətin tədqiqi bir mənalı olaraq mürəkkəb riyazi məsələlərə gətirilir. Bu kimi məsələlərin analitik həllərin alınması qeyri mümkündür. Burada yeganə yol ədədi hesablama üsullarıdır. Amma belə halda həllər qapalı olmadığı üçün onların texnikada tətbiqi məhduddur, ona görə ki, mühəndis təcrübəsində, kifayər qədər sadə, qapalı həllər, düsturlar və mühasibətlər tələb olunur. Bununla əlaqədar çoxölçülülüyün təqribi nəzərə alınması zəruri və aktual olur. Kvazibirölçülü riyazi modellərin qurulması və istifadə olunması təqdim olunan məqalələrin məqsədlərindən biridir.Çubuğun əyilmə rəqslərində eninə hərəkətin ətaləti birölçülü hərəkət tənliyində əlavə hədlə nəzərə alınır. Məqalədə defektlərin bərpa prosesinin olmadığı halı üçün özlüzədələnən çubuğun əyilmə rəqsləri tədqiq olunmuşdur. Burada irsi növ zədələnmə modelindən istifadə olunmuşdur.

Açar sözlər: rəqslər, zədələnmə, eninə hərəkətin ətaləti, amplitud-tezlik xarakteristikası.

STUDY OF BENDING VIBRATIONS VISCOUS INJURED ROD WITH NO EFFECT ON THE HEALING OF DEFECTS

M.A.MAMMADOVA

SUMMARY

Oscillations of mechanical systems with complex rheological properties, as a rule, leads to complex mathematical problems. Solving these problems analytically is not possible and so the only way to solve them – is numerical. But it sometimes limits visibility of the solutions and do not allow them to be widely used in practice, because the needs for engineering need to have a relatively simple closed formulas. For this purpose, the actual path is not one-dimensional approximate calculation, with the construction of a quasi-one models, in general, multidimensional problem. One of those ways is to model the bending rod in which the inertia of the transverse motion is considered as an additional term. The article using this model are investigated flexural vibrations viscosity of damaged rod with no effect on the healing of defects. As a model of damaged body adopted a genetic model of damage.

Keywords: oscillations, damageability, the inertia of the transverse motion, the amplitude-frequency characteristic.

BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 *Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası* *2022*

FİZİKA

УДК 539.21
PACS 68.65. Cd, 73.50.Bk

АНИЗОТРОПИЯ ЭЛЕКТРОПРОВОДНОСТИ В СВЕРХРЕШЕТКАХ ПРИ РАССЕЯНИИ НОСИТЕЛЕЙ ТОКА НА БЛИЗКОДЕЙСТВУЮЩЕМ ПОТЕНЦИАЛЕ ПРИМЕСЕЙ И ДЕФЕКТОВ

С.Р.ФИГАРОВА, Г.И.ГУСЕЙНОВ[1]
Бакинский Государственный Университет
[1]Азербайджанский Университет Архитектуры и Строительства
sophiafigarova@gmail.com

Исследована электропроводность слоистых электронных системах и сверхрешеток при рассеянии носителей тока на близкодействующем потенциале примесей и дефектов. Изучено влияние параметров анизотропного косинусоидального энергетического спектра и времени релаксации на электропроводность. Выявлено, что значительное увеличение анизотропии электропроводности наблюдается для квазидвумерного электронного газа при большой анизотропии эффективной массы.

Ключевые слова: сверхрешетка, квазидвумерный электронный газ, электропроводность, сильно экранированные ионы примеси.

1.**Введение**

Сверхрешетки, являются идеальной системой для исследования явлений переноса в низкоразмерных системах, а также для создания различных приборов на их основе: детекторов, высокочувствительных сенсоров и генераторов сверхвысоких частот. Важнейшим определяющим параметром в электронных явлениях переноса является время релаксации при различных механизмах рассеяния. Известно, что в области низких температур рассеяние носителей тока на ионах примеси – один из основных механизмов рассеяния. В настоящее время имеется целый ряд работ, посвященных механизмам рассеяния в низкоразмерных электронных системах, и в некоторых из них [1-8] рассматривается рассеяние носителей тока на ионах примеси и влияние этого механизма релаксации на электропроводность. Но работ по электропроводности с учетом примесного рассеяния сравнительно мало. В работе [3] изучается дисперсия времени релаксации при рассеянии на ионах примеси и проводится только численный расчет, учитывающий влияние этого механизма рассеяния на подвижность невырожденного электронного газа в сверхрешетках с легированными квантовыми ямами. В отличие от [3] в настоящей работе на основе компактного аналитическое выражение для анизотропного времени релаксации [8,9,10] рассматривается вырожденный электронный газ. Отличие также заключается в том, что в работе [3] используется гипотеза Конуэлл-Вайскопфа, а мы рассматриваем рассеяние на экранированном кулоновском потенциале, что обеспечивает устранение расходимости в сечении рассеяния. В [8,9,10] построена теория электропроводности с учетом анизотропного рассеяния носителей тока на экранированных ионах примеси в квазидвумерных электронных системах с косинусоидальным законом дисперсии. В этих работах рассмотрен случай слабого экранирования и показано, что величина анизотропии электропроводности зависит от соотношения между шириной мини-зоны и уровнем Ферми и определяется отношением радиуса экранирования к постоянной решетки поперек слоя. В данной работе изучается анизотропия электропроводности при рассеянии носителей тока на ионах примеси в случае сильного экранирования, когда время релаксации изотропно и определяется плотностью состояния и концентрацией примеси. При вычислении электропроводности учитывается анизотропия энергетического спектра, а также механизм рассеяния носителей тока на ионах примеси с близкодействующим потенциалом. Рассматривается квазидвумерный (энергия Ферми больше ширины мини-зоны сверхрешетки) и квазитрехмерный (энергия Ферми меньше ширины мини-зоны сверхрешетки) вырожденный электронный газ. Температура считается достаточно высокой по сравнению с температурой Дебая, так что рассеяние на примесных центрах является упругим и можно пользоваться приближением времени релаксации .

II. Время релаксация при рассеяния носителей тока на близкодействующем потенциале примесей и дефектов и общее выражение тензора электропроводности .

Характерной особенностью слоистых соединений и сверхрешеток является то, что они обладают анизотропным энергетическим спектром. Рассмотрим косинусоидальный закон дисперсии:

$$\varepsilon = \varepsilon(k_\perp) + \varepsilon(k_z) = \frac{\hbar^2 k_\perp^2}{2m_\perp} + \varepsilon_0[1-\cos(ak_z)] \tag{1}$$

здесь, $k_\perp -$ продольная, $k_z = k_{//} -$ поперечная компоненты волнового вектора электрона, $k_\perp^2 = k_x^2 + k_y^2$, $m_\perp = m_x = m_y$ эффективная масса электронов проводимости в плоскости слоя сверхрешетки, $\varepsilon_0 -$ полуширина одномерной мини-зоны проводимости, $\hbar -$постоянная Планка, $a -$период сверхрешетки в направлении, перпендикулярном плоскости слоев. Эффективная масса в z направлении равна: $\frac{1}{m_z} = \frac{\varepsilon_0 a^2}{\hbar^2}\cos(ak_z)$. Плотность состояний в сверхрешетках определяется формулой:

$$g(\varepsilon) = \frac{m_\perp}{\pi\hbar^2 a} Z(\varepsilon),$$

где $Z = ak_{\bar{z}}$.

В области низких температур рассеяние носителей тока на ионах примеси является одним из основных механизмов рассеяния. Как известно, примесные атомы обычно создают дискретные энергетические уровни, расположенные в запрещенной зоне вблизи краев запрешенных зон. Поэтому они легко ионизируются при низких температурах. Для определения кинетических коэффициентов необходимо знать время релаксации. Подобная задачи в квазидвумерных электронных системах решена в работе [7] при рассеянии на слабо экранированных ионах примеси $kr_0 \gg 1$ (здесь k-модуль волнового вектора электрона, r_0-радиус экранирования электрического поля иона примеси, который в сверхрешетках определяется формулой $r_0^{-2} = \frac{4\pi e^2}{\chi}\frac{m_\perp Z(\varepsilon_F)}{\pi^2\hbar^2 a} = \frac{4\pi e^2 n}{\chi}$). В случае сильного экранирования $kr_0 \ll 1$ заряженный атом примеси ведет себя как точечный дефект с короткодействующим потенциалом. В области низких температур в рассеянии носителей заряда могут играть роль также точечные дефекты сверхрешетки, имеющие различную природу. Эти точечные дефекты можно рассматривать как короткодействующий δ - образный потенциал

$$U(\vec{r}) = U_0\delta(\vec{r}), \tag{2}$$

где начало координат выбрано в силовом центре, U_0 - представляет собой обьемный интеграл потенциала

$$U_0 = \int U(\vec{r})d\vec{r} \approx |U|d^3 = const. \tag{3}$$

Видно, что в этом случае конечной величиной является $|U|d^3$, где d - размер области, в которой $U(r)$ заметно отличается от нуля. Отметим, что для выполнения условия приближения Борна $|U|d^3 \ll (\hbar^2/m)d$

необходимо, чтобы d были конечными.

В этом случае в сверхрешетках при рассеянии носителей тока на близкодействующем потенциале примесей и дефектов обратное время релаксации изотропно и равно [9]:

$$\frac{1}{\tau_{//}} = \frac{1}{\tau_{\perp}} = \frac{1}{\tau_0} 2k_z r_0 = \frac{1}{\tau_0}\left(\frac{2r_0}{a}\right) Z \tag{4}$$

здесь $\tau_0 = (m_{\perp}\chi)^{1/2} / 8\pi N_i e\, a^{3/2}$, χ – диэлектрическая проницаемость, k_0 – постоянная Больцмана, e – заряд электрона, N_i – концентрация примеси. При получении этого выражения использовалось борновское приближении, в которых соблюдается условия $r_0 << r_в$ (где $r_в = \chi\hbar^2/me^2$ эффективный боровский радиус).

Для косинусоидального закона дисперсии (1) и времени релаксации (4) вычислены компоненты электропроводности σ_{ik} квазидвумерных электронных систем, исходя из выражения плотности тока [10].

$$j_i = -en\left\langle P_i \frac{\vartheta_i^2}{\varepsilon_{\perp}} \right\rangle , \tag{5}$$

где $P_i = \hat{\tau}\Phi_i$ – компоненты импульса обобщенной силы Φ_i [10], вызывающий дрейф носителей тока, $n_0 = m_{\perp}(\zeta - \varepsilon_0)/(\pi^2\hbar^2 a)$ [8],

$$\langle A \rangle = \frac{m_{\perp}}{2\pi^2\hbar^2 a} \int_0^{Z_0} dZ \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\infty} \varepsilon_{\perp}\left(-\frac{\partial f_0}{\partial \varepsilon_{\perp}}\right) A d\varepsilon_{\perp} \tag{6}$$

Подставляя (4) в (5) получим общие выражение компонент тензора электропроводности, который имеет вид:

$$\sigma_{ii} = e^2 n_0 \left\langle \frac{\tau_{ii}\vartheta_i^2}{\varepsilon_{\perp}} \right\rangle \tag{7}$$

где $Z_0 = \arccos\left(1 - \frac{\varepsilon_F}{\varepsilon_0}\right)$.

2. Электропроводность в сверхрешетках при рассеяния носителей тока на близкодействующем потенциале примесей и дефектов.

На основе полученных общих выражений для компонент тензора электропроводности σ_{ii} определим поперечные и продольные компоненты электропроводности, соответственно. В случае вырожденного электронного газа после интегрирования по $\varepsilon_{\perp}$ и φ в цилиндрических координатах для поперечной $\sigma_{\perp}$ и продольной σ_{II} компонент электропроводности получим.

$$\sigma_{\perp} = \sigma_0 \frac{\varepsilon_0}{\zeta_F - \varepsilon_0}\left(\frac{a}{2r_0}\right) I_{-1,0,1} \quad , \tag{8}$$

$$\sigma_{II} = \sigma_0 \frac{\varepsilon_0}{\zeta_F - \varepsilon_0} \frac{m_\perp}{m_{II0}} \left(\frac{a}{2r_0} \right) \left(I_{-1,0,0} - I_{-1,2,0} \right) , \tag{9}$$

где $I_{klm} = \int_0^{Z_0} Z^k \cos^l Z (\cos Z - \cos Z_0)^m dZ$, $\sigma_0 = \frac{e^2 n_0 \tau_0}{m_\perp}$, $n_0 = \frac{m_\perp (\zeta_F - \varepsilon_0)}{\pi^2 \hbar^2 a}$, ζ_F -энергия Ферми.

Из выражения (8) и (9) видно, что поперечная компонента электропроводности $\sigma_\perp$ зависит от отношения энергией ζ_F / ε_0 , отношения радиуса экранирования к постоянной решетки r_0/a , а также от степени заполнения мини-зоны сверхрешетки Z_0. А продольная компонента электропроводности σ_{II} , кроме того, зависит от отношения эффективных масс $m_{II0}/m_\perp$. Используя выражения (8-9) для отношения электропроводности в плоскости слоев $\sigma_\perp$ к электропроводности σ_{II} поперек слоев получим:

$$\frac{\sigma_\perp}{\sigma_{II}} = \frac{m_{II0}}{m_\perp} \frac{I_{-1,0,1}}{I_{-1,0,0} - I_{-1,2,0}} . \tag{10}$$

Отсюда видно, что в отличие от рассеяния на слабо экранированных ионах примеси [8,9,10], при сильно экранированных ионах примеси отношение $\sigma_\perp / \sigma_{II}$ - существенно зависит от анизотропии эффективной массы $m_{II0} / m_\perp$. Приближенное вычисление интегралов I_{klm} дает:

$$\frac{\sigma_\perp}{\sigma_{II}} = \frac{m_{II0}}{m_\perp} \cos Z_0 \tag{11}$$

На основе формулы (10) построена зависимость анизотропии электропроводности от степени заполнения мини-зоны сверхрешетки для различных отношений эффективных масс вдоль слоя и поперек его (рис.1).

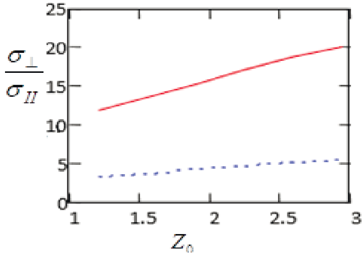


Рис. 1. Зависимость анизотропии электропроводности $\sigma_\perp / \sigma_{II}$ от степени заполнения мини-зоны Z_0 . Сплошная кривая 1 для $m_{II0}/m_\perp = 5$, а пунктирная кривая 2 для $m_{II0}/m_\perp = 2$.

Из рис. 1 следует, что анизотропия электропроводности растет с ростом степени заполнения мини-зоны Z_0, причем величина анизотропия $\sigma_\perp / \sigma_{II}$ определяется анизотропией эффективной массы: с увеличением эффективной массы вдоль оси сверхрешетки анизотропия электропроводности увеличивается в несколько раз.

4. Заключение.

В работе исследуется электропроводность в сверхрешетках с косинусоидальным законом дисперсии при рассеянии электронов проводимости на ионах примеси и дефектах с близкодействующим потенциалом. Показано, что анизотропия электропроводности растет с ростом степени заполнения мини-зоны, причем величина анизотропия электропроводности определяется анизотропией эффективной массы и периодом сверхрешетки.

Изменение плотности состояний в сверхрешетки приводит к увеличению концентрации носителей тока при данном химическом потенциале и вызывает изменение энергетических характеристик материала, что приводит к многократному увеличению электропроводности. Выявлено, что значительное увеличении анизотропии электропроводности наблюдается для квазидвумерного электронного газа при большой анизотропии эффективной массы.

ЛИТЕРАТУРА

1. Sarma S.D., Hwang E.H. Charged impurity scattering–limited low temperature resistivity of low–density silicon inversion layers. Physical Review Letters, - 1999.83, - p. 164-168.
2. Henriques A.B., Souza P.L., Yavich B. Electronic scattering in doped finite superlattices. Physical Review B, - 2001.64, - p.045319(1-6).
3. Борисенко С.И. Рассеяние электронов на ионах примеси при низких температурах в сверхрешетке с легированными квантовыми ямами. ФТП, - 2003. - 37 (9), - с. 1117-1122.
4. Пшенай-Северин Д.А., Равич Ю.И. Расчет подвижности и термоэлектрической эффективности многослойных структур с квантовыми ямами. ФТП, - 2002. - 36, - вып.8, - с.974-980.
5. Борисенко С.И. Физика полупроводниковых наноструктур. - Томск: Томский Политехнический Университет, - 2010, - 115 с.
6. Борисенко С.И. Дисперсия времени релаксации квазидвумерных электронов при рассеянии на ионах примеси в сверхрешетке с легированными квантовыми ямами. ФТП, 2003. 37 (5), - с. 588-591.
7. Henriques, A.B, Goncalves L.C.D., Oliveira N.F. [et. al.] Ionized impurity scattering in periodically $\delta -$ dopped InP. Physical Review B, -1997, - 55, - p. 13072-13079.
8. Askerov, B.M., Figarova, S.R., Guseinov, G.I.Figarov V.R Relaxation time and electricalconductivity anisotropy of layered crystals at the scattering of charge carriers by impurity ions. AIP Conference Proceedings "Frontiers of fundamental physics: Eighth international Symposium FFP8", American Institute of Physics, USA, 28 april, 2007. - vol. 905, - p. 43-47.
9. Askerov B.M., Figarova S.R., Huseynov H.I., Figarov V.R. Anisotropy of impurity scattering and electrical conductivity in quasi-two-dimensional electronic systems. Physics of the Solid State, - 2008.50, - No.4, - p.746-750.

10. Askerov, B.M., Kuliev B.I., Figarova S.R. [et. al.]. Electron – phonon scattering and anisotropy of conductivity in quasi–two–dimensional systems (Journal of Physics: Condensed Matter), - 1995.7, - p. 843-848.
11. Askerov B.M. Electron transport phenomena in semiconductors. World Scientific, Singapore (1993). 394 p
12. Askerov B.M., Figarova S.R.Thermodynamics, Gibbs Method and Statistical Physics of Electron Gases. - Berlin: Springer Verlag, - 2010, - 374 p.

YÜKDAŞIYICILARIN AŞQAR İONLARI VƏ DEFEKTLƏRİN YAXINATƏSİR POTENSİALINDAN SƏPİLMƏSİ HALINDA İFRATQƏFƏSLƏRDƏ ELEKTRİKKEÇİRİCİLİYİN ANİZOTROPLUĞU

S.R.FİQAROVA, H.İ.HÜSEYNOV

XÜLASƏ

İşdə yükdaşıyıcıların aşqar ionları və defektlərin yaxınatəsir potensialından səpilməsi halında laylı elektron sistemləri və ifratqəfəslərin elektrikkeçiriciliyi tədqiq olunmuşdur. Anizotrop kosinusoidal enerji spektrinin və relaksasiya müddətinin parametrlərinin elektrikkeçiriciliyə təsiri öyrənilmişdir. Aşkar edilmişdir ki, elektrikkeçiriciliyin anizotropluğunun güclü artması effektiv kütlə anizotropluğunun böyük qiymətlərində müşahidə olunur.

Açar sözlər: ifratqəfəs, kvaziikiölçülü elektron qazı, elektrikkeçiriciliyi, güclü ekranlaşmış aşqar ionları.

ANISOTROPY OF ELECTRICAL CONDUCTIVITY IN SUPERLATTICES FOR THE SCATTERING OF CHARGE CARRIERS BY SHORT–RANGE POTENTIAL OF INPURITY IONS AND DEFECTS

S.R.FIGAROVA, H.I.HUSEYNOV

SUMMARY

Electrical conductivity of layered electronic systems and superlattices during current carrier scattering at the short-range potential of impurity ions and defects are investigated. The effect of anisotropic cosinusoidal energy spectrum parameters and relaxation time on electrical conductivity have been studied. It was found that a significant increase in the anisotropy of electrical conductivity is observed for quasi-two-dimensional electron gas with a large anisotropy of the effective mass.

Keywords: superlattices, quasi-two-dimensional electron gas, electrical conductivity, strongly screened impurity ions.

BAKI UNİVERSİTETİNİN XƏBƏRLƏRİ

№4 Fizika-riyaziyyat elmləri seriyası 2022

UDK 621.38

$(TlGaSe_2)_{1-x}(TlGaS_2)_x$ BİRLƏŞMƏLƏRİ ƏSASINDA BƏRK MƏHLULLARIN FOTOKEÇİRİCİLİYİNIN XÜSUSİYYƏTLƏRİ

L.H.HƏSƏNOVA, Ə.Z.MƏHƏMMƏDOV

Bakı Dövlət Universiteti

ludmilahasanova@mail.ru

$(TlGaSe_2)_{1-x}(TlGaS_2)_x$ bərk məhlulunun müxtəlif temperaturda fotokeçiriciliyi tədqiq olunmuş, müxtəlif tərkiblər üçün qadağan olunmuş zonanın eni hesablanmış, bu qiymətlər optik udulmadan tapılan qiymətlə müqayisə edilmiş, $E_g(x)$-in tərkibdən qeyri-xətti asılı olduğu göstərilmiş, bunun səbəbi izah olunmuşdur.

Açar sözlər: fotokeçiricilik, bərk məhlul, spektral asılılıq, fluktuasiya.

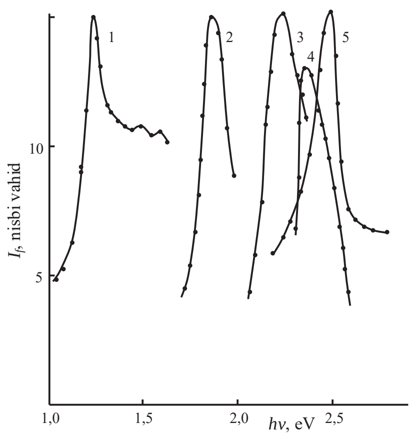
Son illər dar zonalı elementar yarımkeçiricilərlə yanaşı, geniş qadağan olunmuş zonaya malik $A^{III}B^{V}$, $A^{II}B^{VI}$ və $A^{III}B^{VI}$ tip birləşmələr intensiv tədqiq edilsə də müəyyən praktiki şəraitlərdə onların fiziki parametrlərinin dayanıqsızlığı yeni materialların alınmasını tələb edir.

Hazırda tədqiqatçıların geniş tədqiqat obyektinə çevrilmiş materiallardan biri laylı və zəncirvari quruluşa malik $A^{III}B^{III}C_2^{VI}$ tipli yarımkeçirici birləşmələrdir. Bu onların görünən, infraqırmızı və rentgen oblastlarında yüksək həssaslığa malik olmaları ilə əlaqədardır. $A^{III}B^{III}C_2^{VI}$ qrupuna daxil olan birləşmələrin kristal quruluşu, elektrofiziki və optik xassələri geniş temperatur intervalında tədqiq olunmuşdur. Müəyyən edilmişdir ki, müxtılif kimyəvi tərkibə malik olan bu birləşmələr müxtəlif modifikasiyalarda mövcud olub, quruluşu və simmetriyasına görə bir-birindən fərqlənir. Hər bir modifikasiyanın fiziki xassələri isə alınma texnologiyasından, maddələrin kimyəvi təmizliyindən asılıdır. İlkin tədqiqatlar baxılan üçqat maddələr əsasında bərk məhlulların alındıgı və alınmış birləşmələrin fiziki xassələrinin geniş intervalda idarə olunduğunu göstərmişdir.

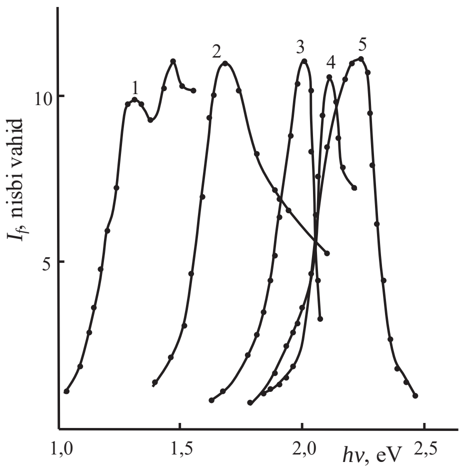
Belə ki, yarımkeçirici bərk məhlullar əsasında tezliyi dəyişdirilə bilən bərk cisim lazerlərinin hazırlana biləcəyə varizon strukturların və digər cihazların yaradılmasına, həmçinin qadağan olunmuş zonadakı lokal səviyyələrin zolaq spektrinin enerji strukturunun xüsusiyyətlərini öyrənməyə imkan verir.

Baxılan işdə $(TlGaSe_2)_{1-x}(TlGaS_2)_x$ bərk məhlulunun fotokeçiriciliyi öyrənilmişdir. $(TlGaSe_2)_{1-x}(TlGaS_2)_x$ bərk məhlulunun (x 0 – 0,45 və 0,55 – 1,0 intervalında dəyişir) monokristalları Bricmen-Stokbarger üsulu ilə göyərdilmişdir. Qeyd etmək lazımdır ki 0,45<x≤0,55 konsentrasiya oblastında bərk məhlulda həllolma müşahidə olunmur.

Alınmış kristallar layvari olduğundan fotokeçiriciliyi ölçmək üçün lazımi ölçüdə nümunələr laylardan ülgüclə ayrılır və təbii halda güzgü səthinə malik olduğundan mexaniki cilalanmaya ehtiyac qalmır. Hazırlanmış nümunələrə gümüş pastasından omik kontakt qoyulur. Fotokeçiricilik ölçülən zaman elektrik sahəsi təbii laylar boyunca tətbiq edilir, işıq kvantları isə səthə perpendikulyar istiqamətdə yönəlir. Ölçmələr volt-amper xarakteristikasının xətti olduğu gərginlik oblastında aparılmışdır. Fotokeçiriciliyin spektral xarakteristikaları 77 K (şəkil 1) və 300 K (şəkil 2) temperaturlarda çıxarılmışdır. Şəkil 1-dən göründüyü kimi $(TlGaSe_2)_{1-x}(TlGaS_2)_x$ bərk məhlullarının fotohəssaslığı 1,0-dan 2,8 eV-a qədər geniş spektral oblastı əhatə edir. Otaq temperaturunda isə $(TlGaSe_2)_{1-x}(TlGaS_2)_x$ bərk məhlullarının fotokeçiriciliyinin spektral paylanması eyni xarakter daşıyır (şəkil 2).



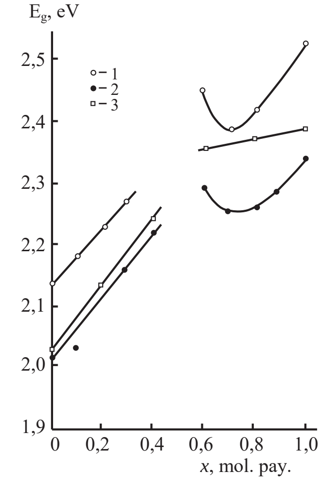
Şək. 1. $(TlGaSe_2)_{1-x}(TlGaS_2)_x$ bərk məhlullarının monokristallarının fotokeçiriciliyinin 77 K temperaturda spektral asılılıqları. x (mol hissə): 1 – 0; 2 – 0,1; 3 – 0,3; 4 – 0,6; 5 – 1,0.



Şək. 2. $(TlGaSe_2)_{1-x}(TlGaS_2)_x$ bərk məhlullarının monokristallarının fotokeçiriciliyinin 300 K temperaturda spektral asılılıqları. x (mol hissə): 1 – 0; 2 – 0,1; 3 – 0,3; 4 – 0,6; 5 – 1,0.

x=0–0,4 tərkiblərində fotokeçiriciliyin maksimal qiymətinin azalmasının yarısına uyğun enerji böyük enerjilərə doğru xətti yerini dəyişir, x=0,6– 1,0 tərkibləri üçün bu xəttilik pozulur. x=0,9 tərkibinə uyğun fotokeçiriciliyin spektral paylanma əyrisində 2,26 və 2,1 eV enerjilərdə iki maksimum müşahidə olunur, x=0,8 tərkibli kristalda isə bu maksimumlar 2,35 və 1,95 eV-a uyğun gəlir. Müxtəlif tərkiblər üçün fotokeçiriciliyin maksimumunun yerdəyişməsində bir qanunauyğunluq müşahidə olunmur. Baxılan kristallar böyük qadağan olunmuş zonaya malik olduğundan qadağan olunmuş zonada dərin aşqar səviyyələri lokallaşır və onlar fotokeçiriciliyin azalmasının yarı qiymətinə görə qadağan olunmuş zonanın eninin dəqiq təyin olunmasında xətalar yaradır. Ona görə E_g-nin qiyməti spektral paylanmanın ekstrapolyasiyasından hesablanır.

E_g-nin qiyməti, həmçinin x-in müxtəlif qiymətləri üçün 300 K-də udma əmsalının spektral asılılığından tapılmışdır. Şəkil 3-də 77 və 300 K-də $(TlGaSe_2)_{1-x}(TlGaS_2)_x$ bərk məhlullarının qadağan olunmuş zonanın eninin (E_g) x-dən asılılığı verilmişdir.



Şək. 3. Qadağan olunmuş zonanın eninin (E_g) 77 (1) və 300 K (2) temperaturda fotokeçiricilikdən və 300 K-də optik udmadan (3) tapılmış qiymətlərin tərkibdən asılılığı.

Şəkildən göründüyü kimi $0 \leq x \leq 0,4$ qiymətlərində E_g-nin həm optik, həm də fotoelektrik xassələrdən tapılmış qiymətləri tərkibdən xətti asılıdır. x-in 0,6-dan 1,0-a qədər olan qiymətləri arasında fotoelektrik ölçmələrin nəticələrinə görə xəttilik pozulur, optik udmaya görə hesablanmış E_g isə tərkibdən zəif asılı olur. $A^{III}B^{V}$ və $A^{II}B^{VI}$ birləşmələri əsasında bərk məhlullarda qadağan olunmuş zonanın eninin tərkibdən $E_g(x)$ qeyri-xətti asılılığı ədəbiyyatda məlumdur və onu izah etmək üçün iki model təklif olunmuşdur.

[1 – 3] işlərində dielektrik modeldən və [4] işində psevdopotensial modeldən istifadə olunmuşdur. Birinci modelə görə $E_g(x)$ asılılığının xəttilikdən kənara çıxması kristal potensialının fluktasiyasıdır, bu da əvəzedici ionların xaotik yerləşməsi nəticəsində müşahidə olunur. İkinci modelə görə $E_g(x)$-in xəttiliyi, başqa sözlə birləşmələrin kimyəvi əlaqələrinin müxtəlifliyi ilə əlaqədələndirilir.

$A^{III}B^{III}C_2^{VI}$ tipli mürəkkəb yarımkeçirici birləşmələrin bərk məhlullarında $E_g(x)$ asılılığında qeyri-xəttilik müşahidə olunmuşdur. Bu kristallarda qeyri-xəttilik baxılan kristallarda fluktasiyaların varlığı ilə izah edilməyə cəhd edilmişdir. Belə ki, bütün real bərk məhlullar bu və ya digər dərəcədə fəza fluktasiyalarının varlığı ilə xarakterizə olunur. Kiçikölçülü fluktasiyaların bəzi xassələri qəfəsin düyünlərində atomların paylanmasının statistik xarakteri ilə əlaqədardır. Belə fluktasiyalar kiçik amplituda malikdir və yalnız alçaq temperaturda yarımkeçiricilərin xassələrinə təsir edir.

Bərk məhlulların təcrübi tədqiqində xeyli böyük fəza ölçülərinə və amplituda malik fluktasiyalar özünü göstərir. Bu fluktasiyalar bərk məhlulların alınma texnologiyası ilə əlaqədardır. Bu qeyri-bircinsliklər maddənin elektron xassələrinə çox ciddi təsi göstərir. Bərk məhlullarda fluktasiyaların təsiri isə həm bircins, həm də qeyri-bircins aşqarlanmış yarımkeçiricilərdən fərqlənir.

$A^{III}B^{III}C_2^{VI}$ tipli yarımkeçiricilər əsasında alınmış bərk məhlullar izostruktur quruluşa malik olduğundan, qeyri-xəttiliyi tərkibdəki maddələrin bircinsliyinin pozulması ilə izah etmək olar. Doğrudan da $E_g(x)$-in qeyri-xəttiliyi x=0,6 tərkibində, yəni məhlulda həllolunmanın baş vermədiyi oblastda (0,45≤x≤0,55) müşahidə olunur və ona görə baxılan tərkibin qeyri-bircins olduğunu demək olur. x=0,4 tərkibinin də bərk məhlulun həllolma oblastının yaxınlığında yerləşməsinə baxmayaraq ona uyğun E_g qadağan olunmuş zonanın x-dən asılılığının xətti hissəsində yerləşir. Aralıq tərkibin yaxınlığında (0,4≤x≤0,6) xəttiliyin pozulmasını bu tərkiblər üçün nizamlılığın pozulması ilə izah etmək olar.

[5] işinə görə bu tərkibdə fotokeçiricilik ona yaxın tərkiblərə nəzərən kiçik olmalıdır. Doğrudan da x=0,6 tərkibinə uyğun fotokeçiricilik (şək. 1, 4 əyrisi), x=1,0 və x=0,3 tərkiblərinə uyğun fotokeçiriciliyə nəzərən xeyli kiçikdir. [5]-də göstərildiyi kimi, göstərilən tərkibdə böyük fəza ölçülərinə və amplitudlara malik fluktuasiyaların olması fotokeçiriciliyi ölçən zaman potensial relyef nümunələrin eyni sahələrində elektron və deşiklərin lokallaşmasına səbəb olur ki, bu da fotokeçiriciliyi azaldır.

ƏDƏBİYYAT

1. Van Vechten J.A. Quantum dielectric theory of electronegativity in covalent systems. // Phys. Rev. - 1969, - v. 182, - № 3, - p. 891.

2. Van Vechten J.A., Bergstresser T.K. Electronic structures of semiconductors alloys. // Phys. Rev. - 1970, - v. 1, - № 8, - p. 3351.
3. Hill R., Richardson D. A comparison of the EPM and DM methods for calculation in mixed zincblende alloys. // Z. Phys. C: Solid State Phys. - 1971, - B, 4, - №16, - s. L339.
4. Hill R., Richardson D. The variation of energy gap with composition in ZnS – Te alloys. // Z. Phys. C: Solid State Phys. - 1973, - B, 6, - № 5, - s. L115.
5. Петросян С.Г., Шик А.Я. Фотопроводимость неоднородных полупроводниковых твердых растворов. // ЖЭТФ, - 1982, - т. 35, - № 8, - с. 357.

ОСОБЕННОСТИ ФОТОПРОВОДИМОСТИ ТВЕРДЫХ РАСТВОРОВ НА ОСНОВЕ СОЕДИНЕНИЯ $(TlGaSe_2)_{1-x}(TlGaS_2)_x$

Л.Г.ГАСАНОВА, А.З.МАГОМЕДОВ

РЕЗЮМЕ

Исследована фотопроводимость твердого раствора $(TlGaSe_2)_{1-x}(TlGaS_2)_x$ при разных температурах, рассчитана ширина запрещенной зоны для разных составов твердого раствора, проведено сравнение этих значений со значением, найденным по оптическому поглощению, показано, что $E_g(x)$ нелинейно зависит от состава, была объяснена причина этой зависимости.

Ключевые слова: фотопроводимость, твердый раствор, спектральная зависимость, флуктуация.

FEATURES OF THE PHOTOCONDUCTIVITY OF SOLID SOLUTIONS BASED ON THE $(TlGaSe_2)_{1-x}(TlGaS_2)_x$ COMPOUND

L.G.HASANOVA, A.Z.MAHAMMADOV

SUMMARY

The photoconductivity of the solid solution $(TlGaSe_2)_{1-x}(TlGaS_2)_x$ was studied, at different temperatures the band gap was calculated for different compositions of the solid solution, these values were compared with the value found from optical absorption, it was shown that $E_g(x)$ depends nonlinearly on the composition, and the reason for this dependence was explained.

Keywords: photoconductivity, solid solution, spectral dependence, fluctuation.

MÜNDƏRİCAT

RİYAZİYYAT

MEXANİKA

FİZİKA

СОДЕРЖАНИЕ

МАТЕМАТИКА

МЕХАНИКА

ФИЗИКА

CONTENTS

MATHEMATICS

MECHANICS

PHYSİCS